Développements limités.

o et équivalents (fonctions et suites)

Définitions.

$f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\forall x \in I \backslash \{a\}, g(x) \neq 0$

- $\boxed{\boldsymbol{f = o_a(g)}}$ **f négligeable devant g** au voisinage de a ssi il existe une application ε
  $\boxed{\boldsymbol{u_n = o_\infty(v_n)}}$ $\boldsymbol{u_n}$ **négligeable devant** $\boldsymbol{v_n}$ au voisinage de ∞ ssi il existe ε

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = \varepsilon(x)g(x) \\ \lim_a \varepsilon(x) = 0 \end{cases}} \quad \text{ou pour les suites} \quad \boxed{\begin{cases} u_n = \varepsilon(n)v_n \\ \lim_\infty \varepsilon(n) = 0 \end{cases}}$$

- $\boxed{\boldsymbol{f = O_a(g)}}$ **f est dominée par g** au voisinage de a ssi il existe une application C
  $\boxed{\boldsymbol{u_n = O_\infty(v_n)}}$ $\boldsymbol{u_n}$ **dominée par** $\boldsymbol{v_n}$ au voisinage de ∞ ssi il existe C

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = C(x)g(x) \\ C \text{ est bornée au voisinage de } a \end{cases}} \quad \text{ou pour les suites} \quad \boxed{\begin{cases} u_n = C(n)v_n \\ C \text{ bornée} \end{cases}}$$

- $\boxed{\boldsymbol{f \sim_a (g)}}$ $\boxed{\boldsymbol{f = g(1 + o(1))}}$
  $\boxed{\boldsymbol{u_n \sim_\infty (v_n)}}$ $\boxed{\boldsymbol{u_n = v_n(1 + o_\infty(1))}}$

  $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $\forall x \in I \backslash \{a\}, f(x) \neq 0 \; et \; g(x) \neq 0$

  f équivalente g au voisinage de a ssi il existe une application λ (ou $\boldsymbol{u_n}$ **équivalente** $\boldsymbol{v_n}$ au voisinage de ∞)

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = \lambda(x)g(x) \\ \lim_a \lambda(x) = 1 \end{cases}} \quad \text{ou pour les suites} \quad \boxed{\begin{cases} u_n = \lambda(n)v_n \\ \lim_\infty \lambda(n) = 1 \end{cases}}$$

Définitions développements limités.

- f admet un $DL_n(0)$ ssi il existe un polynôme P (à coeff. réels) tel que :

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ au\ voisinage\ de\ 0, \;\; f(x) = P(x) + o(x^n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \deg(P) \leq n \\ f(x) = P(x) + \varepsilon(x)\, x^n \\ \lim\limits_{0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Théorème de Taylor-Young.

Si f est de classe $C^n(I)$ $et\ a \in int(I)$

$$\boxed{\forall x \in I,\ \ f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \boldsymbol{o_a}((x-a)^n)}$$

DL(0) usuels et équivalents.

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad soit \quad \boxed{(e^x - 1) \sim_{\mathbf{0}} x}}$$

$$\boxed{sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2}) \quad soit \quad \boxed{sin(x) \sim_{\mathbf{0}} x}}$$

$$\boxed{cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1}) \quad soit \quad \boxed{(cos(x) - 1) \sim_{\mathbf{0}} -\frac{x^2}{2!}}}$$

$$\boxed{sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})}$$

$$\boxed{ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p+1})}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\big(\alpha-(n-1)\big)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)}$$

$$\boxed{ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \quad soit \quad \boxed{ln(1+x) \sim_{\mathbf{0}} x}}$$

$$\boxed{ln(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^n}{n} + o(x^n)\right) \quad soit \quad \boxed{ln(1-x) \sim_{\mathbf{0}} -x}}$$

$$\boxed{Arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+2})}$$