Fonctions Holomorphes.

Soit f une application de U ouvert de $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{C}$.

1 – Fonctions différentiable.

f est différentiable en $X = (x_0; y_0)$, s'il existe deux complexes a et b tels que :

$\boxed{f(x_0 + h; y_0 + k) = f(x_0; y_0) + ah + bk + \|(h;k)\|\,\varepsilon(h;k)}$ avec ε telle que $\lim\limits_{\|(h;k)\| \to 0} \varepsilon(h) = 0$

S'il en est ainsi, l'application linéaire $\boxed{\boldsymbol{(h;k) \longrightarrow ah + bk}}$ de $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{C}$. est appelée la **différentielle de f en $(x_0; y_0)$** ; et notée $\boxed{\boldsymbol{d_{(x_0;y_0)} f}}$. Dans ce cas on a : $\boxed{d_{(x_0;y_0)} f(h;k) = h\,\frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0; y_o) + k\,\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0; y_o)}$

On écrit aussi que : f est différentiable en a si

$\left\{\begin{array}{l} \exists\ 1\ appli.linéaire\ notée\ d_a f\ \in \mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ \exists\ fonction\ \varepsilon\ telle\ que\ \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \end{array}\right\}$ *telle que :* $\boxed{\forall\ h\ \in U_0,\ f(a+h) = f(a) + d_a\ f(h) + \|h\|\ \varepsilon(h)}$

Rappel pour les fonctions définie sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Exemples :

- Soit $\boldsymbol{f}$ **l'application linéaire** $\boldsymbol{(x; y) \longrightarrow x}$

$$f(x+h; y+k) = x + h = f(x;y) + f(h;k)$$

alors df est indépendante du point $(x; y)$ et on note $\boldsymbol{df = dx}$, on a $\boxed{\boldsymbol{dx(h;k) = h}}$

- Soit $\boldsymbol{g}$ **l'application linéaire** $\boldsymbol{(x; y) \longrightarrow y}$

$$g(x+h; y+k) = y + k = g(x;y) + g(h;k)$$

alors dg est indépendante du point $(x; y)$ et on note $\boldsymbol{dg = dy}$**,** on a $\boxed{\boldsymbol{dy(h;k) = k}}$

- Soit l'application $\boldsymbol{(x; y) \longrightarrow z = x + iy}$

$$f(x+h; y+k) = x + h + \mathrm{i}(y+k) = (x+iy) + (h+ik)$$
$$f(x+h; y+k) = f(x;y) + \boldsymbol{dx(h;k) + i\,dy(h;k)}$$

on note sa différentielle $\boxed{\boldsymbol{dz = dx + idy}}$, on a $\boxed{\boldsymbol{dz(h;k) = h + ik}}$

- Soit l'application $\boldsymbol{(x; y) \longrightarrow \bar{z} = x - iy}$

$$f(x+h; y+k) = x + h - \mathrm{i}(y+k) = (x-iy) + (h-ik)$$
$$f(x+h; y+k) = f(x;y) + \boldsymbol{dx(h;k) - i\,dy(h;k)}$$

on note sa différentielle $\boxed{\boldsymbol{d\bar{z} = dx - idy}}$, on a $\boxed{\boldsymbol{d\bar{z}(h;k) = h - ik}}$

Remarque : $\boxed{dx = \frac{1}{2}\,(dz + d\bar{z})}$ et $\boxed{dy = \frac{1}{2}\,(dz - d\bar{z})}$

2 – Fonctions continues.

2a - Limite

$$\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = a \iff \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\ tq\ \forall z, |z - z_0| < \delta, \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon}$$

2b- Continuité.

***f* est continue en z_0** si : $\boxed{\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)}$

3 – Fonctions dérivables (holomorphes).

3a Fonctions dérivables.

f est dérivable en z_0 si la limite suivante existe, on la note :

$$\boxed{f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0)}$$

Une fonction dérivable sur un domaine est dite **holomorphe** sur ce domaine.

3b - Conditions de Cauchy-Riemann.

Par abus on note souvent $f(x; y)\ pour\ f(z)$ car la bijection de $\mathbb{R}^2$, dans $\mathbb{C}$, $(x; y) \longrightarrow z = x + iy$, permet d'identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$. Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les propositions suivantes sont <u>équivalentes</u> :

1. f est **dérivable en z_0**.
2. f est **différentiable** en $(x_0; y_0)$ et :

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0}$$

Si on note P et Q les parties réelles et imaginaires de f on a :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}} \text{ et } \boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}}$$

On a donc pour f dérivable : $\boxed{f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{i}\,\frac{\partial f}{\partial y}}$

Exemples :

- Soit l'application $(x; y) \longrightarrow z = x + iy$

  Elle est dérivable car différentiable et : $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 1 + i(i) = 0$

- Soit l'application $(x; y) \longrightarrow \bar{z} = x - iy$

  Elle est <u>différentiable mais n'est pas dérivable</u> car : $\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) + i\,\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) = 1 + i(-i) = 2 \neq 0$

4 – Compléments.

a) Une fonction holomorphe est indéfiniment dérivable.

b) $\frac{\partial}{\partial z} f = 0$ n'implique pas que la fonction est constante.

c) Les parties réelles et imaginaires d'une fonction holomorphe vérifient l'équation de Laplace. on les dit **harmoniques.** $\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0}$