IPSA - ING1

TD n°1 : Complexes

EXERCICE 1.

Déterminer $(x + y\,i)$, représentation cartésienne du nombre complexe :

1.1. $(5-i)^2$; $(2+3\,i)^3$; $(1-i\sqrt{5})^3$.

1.2. $(5-4\,i)(3+6\,i)$; $(4+3\,i)^3\,(4-3\,i)^3$.

1.3. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$; $\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{i}{2}\right)^2$.

1.4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7$.

1.5. $\dfrac{1+\alpha i}{2\,\alpha+(\alpha^2-1)\,i}$; $\dfrac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)\,i}$; $(\alpha,\beta)\in \mathbb{R}^2$.

EXERCICE 2.

Soit φ réel ; $z = \cos^2\varphi + i\sin\varphi\cos\varphi$.

1° Déterminer φ tel que $z = 0$.

2° Si $z \neq 0$, calculer $z^{-1}, z^2, z^{-2}, z^3, z^{-3}$.

EXERCICE 3.

Soit α réel ; $z = (\alpha - i)[(10-\alpha)+(2+\alpha)\,i\,]$.

Déterminer α tel que z soit réel.

Préciser, dans ce cas, la valeur de z.

EXERCICE 4.

A tout point $M\,(x,y)$ du plan rapporté au repère (O,u,v), on associe le nombre complexe :

$$z = [(2\,x-y)+(x-y)\,i\,][x+(x-y)\,i\,].$$

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z soit réel.

EXERCICE 5.

1° Soit : α, β, réels fixés, $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$. Déterminer la représentation cartésienne de :

$$z_1 \times z_2 \,;\; \frac{z_1}{z_2} \,;\; z_1^{\,n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

2° Soit $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Calculer : j^2 ; j^3 ; j^n ; $1 + j + j^2$.

EXERCICE 6.

Soit z, nombre complexe, u, nombre complexe de module 1, $u \neq 1$. Démontrer que $\dfrac{z - u\,\bar{z}}{1-u}$ est réel.

EXERCICE 7.

Soit : $z_1 = 4 + 4\,i$; $z_2 = 1 - i\,\sqrt{3}$. Déterminer le module et un argument de : $z_1^{\,2}$, $z_1 z_2$, $z_1^{\,3}$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{z_2}{z_1}$.

EXERCICE 8.

Déterminer le module et un argument de z :

3.1. $z = a\,\dfrac{1 - i\tan\alpha}{1 + i\tan\alpha} \qquad (a,\alpha) \in R^2$

3.2. $z = \dfrac{5 + 11\sqrt{3}\,i}{7 - 4\sqrt{3}\,i}$.

3.3. $z = \dfrac{(1-i)^3}{\left(1 - i\sqrt{3}\right)^4}$.

EXERCICE 9.

Résoudre dans $\mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\begin{cases} z + z' + z'' = 1 \\ z\,z'\,z'' = 1 \end{cases}$$

EXERCICE 10.

Déterminer z, complexe tel que z^2 et z^6 soient conjugués.

EXERCICE 11.

1° Soit z complexe, $z \neq 1$, et $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} z^p$. Exprimer S_n en fonction de z et de n.

2° Soit :

$$\begin{cases} \Sigma_1 = 1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta, \\ \Sigma_2 = 0 + \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta. \end{cases}$$

Calculer $\Sigma_1 + i\,\Sigma_2$. En déduire Σ_1 et Σ_2.

EXERCICE 12.

Soit z_1 , z_2 , z_3 , nombres complexes dans le produit est $3\sqrt{3}\,i$, dont les arguments respectifs θ_1 , θ_2 , θ_3 , forment une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$, et les modules respectifs ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , une suite géométrique de raison 2. Déterminer z_1 , z_2 , z_3 , et construire leurs images dans un plan complexe.

EXERCICE 13.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et soit, dans $\mathbb{C}$:

E_1 , équation en Z : $Z^n = \dfrac{1+ai}{1-ai}$.

E_2 , équation en z : $\left(\dfrac{1+zi}{1-zi}\right)^n = \dfrac{1+ai}{1-ai}$.

1° Démontrer que toute solution de E_1 a pour module 1, et que toute solution de E_2 est réelle.

2° Soit $a = 0$, $n = 3$. Résoudre E_2 .

EXERCICE 14.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 - 6(1+i)z^2 + 24iz - 11 - 16i = 0$.

Soit H l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$, dont le centre est I d'affixe $(-1-i)$.

Pour tout point m, d'affixe z, $H(m) = M$, d'affixe Z.

1° Calculer Z en fonction de z, puis z en fonction de Z.

2° Démontrer que z est solution de l'équation proposée si, et seulement si, Z est solution de : $Z^3 = 1$.

3° Résoudre la seconde équation. En déduire les solutions de la première.

EXERCICE 15.

1°/ Quel est l'ensemble (C) des points z du plan complexe vérifiant : $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = k$, k constante réelle positive.

2°/ Application : $k = 2$. Définir (C) .

3°/ On pose $Z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z} \right)$. Calculer $\left|\dfrac{Z-1}{Z+1}\right|$ en fonction de z.

4°/ Quel est l'ensemble (C') décrit par les points Z du plan complexe lorsque z décrit le cercle (C) ?

5°/ Application : $k = 2$. Définir (C').

EXERCICE 16.

1°/ Déterminez les nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 1$.

2°/ Déterminez sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^4 = 8 (1 - i \sqrt{3})$.

3°/ Soit $a = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Vérifiez : $a^4 = 8 (1 - i \sqrt{3})$. En déduire sous forme algébrique les résultats du 2°/.

4°/ Des questions 2°/ et 3°/, déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{11\pi}{12}$.

EXERCICE 17.

λ, α, β étant trois constantes données réelles ou complexes, montrez que les solutions de l'équation :

$$\lambda^n (z - \alpha)^n - (z - \beta)^n = 0$$

sont toutes sur une même circonférence. Calculez la position du centre et le rayon de cette circonférence. Exprimer l'affixe z_c du centre et le rayon t de cette circonférence en fonction de α, β et λ.