Ing 1 — Analyse numérique (2009-2010)
TD 1 — Calcul matriciel

Exercice 1 Soit A une matrice carrée de taille 3×3, à coefficients réels ou complexes. On considère les matrices :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Décrire, en termes d'opérations sur les lignes et les colonnes, les différents produits de A avec les matrices P_1,P_2,P_3.

Exercice 2 On dit qu'une matrice carrée A est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$.
a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Les matrices A, B, $A+B$, AB, BA, A^2 sont-elles nilpotentes ?
b) On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, nilpotente, avec $A^3 = 0$. On pose $B = I_n + A$. Calculer B^2, B^3, B^4, B^{100}, B^{-1}.

Exercice 3 On munit $\mathbb{C}^2$ de son produit hermitien usuel. Soit $a = (1+i, 2-i)$ et $b = (1-i, 2+3i)$.
a) Déterminer $< a, b >$, $< b, a >$, $||a||$, $||b||$.
b) Déterminer, si possible, un vecteur $c \in \mathbb{C}^2$ vérifiant $< a, c >= 1$ et $< b, c >= i$.

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ où a est un réel.
a) Déterminer $\det A$.
b) Calculer, lorsqu'elle est définie, l'inverse de A.

Exercice 5 a) Déterminer a, b, c pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & c \end{pmatrix}$ soit orthogonale.
b) Déterminer a, b, c pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ b & c \end{pmatrix}$ soit unitaire.

Exercice 6 Soit A une matrice carrée à coefficients complexes. On note A^* l'adjointe de A.
a) Parmi les matrices suivantes, lesquelles sont hermitiennes pour tout A : $A + A^*$, $A - A^*$, AA^*, A^*A, $(A - A^*)^2$, A^* ?
b) On suppose A et B hermitiennes. Que peut-on dire de $A + B$, de AB, de BA, de ABA, de $A - B$?