TD n°2 : Fonctions Holomorphes.

Dérivées

Exercice 1

Calculer la dérivée de $w = f(z) = z^3 - 2z$ aux points

1. $z = z_0$.
2. $z = -1$.

Exercice 2

Montrer que l'application $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) \longrightarrow \bar{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{iy}$, est différentiable mais n'est pas dérivable.

Exercice 3

Soit $w = f(z) = \frac{1+z}{1-z}$.

Trouver $\frac{\partial}{\partial z} f(z_0)$ et déterminer en quels points f n'est pas dérivable.

Exercice 4

1. Montrer que si f est dérivable en z_0, alors f est continue en z_0.
2. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Conditions de Cauchy-Riemann

Exercice 5* (Démonstration de cours)

En supposant les dérivées partielles continues dans $\mathbb{R}$, montrer que :

Soit f une fonction définie au voisinage de $z_0 = x_0 + iy_0$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est **dérivable en $\boldsymbol{z_0}$**.
2. f est **différentiable** en $(x_0; y_0)$ et :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0; y_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0; y_0) = 0}}$$

Si on note P et Q les parties réelles et imaginaires de f on a :

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}}} \ \textbf{et} \ \boxed{\boldsymbol{\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}}}$$

Exercice 6

Montrer que $u = e^{-x}\,(x \sin y - \, y \cos y)$ est harmonique c'est-à-dire que $\boxed{\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2} = \mathbf{0}}$.

Différentielles.

Exercice 7

Soit $w = f(z) = z^3 - 2z^2$

1. Calculer Δw.
2. Calculer dw.

Dérivation.

Exercice 8

Etudier et calculer les dérivées de fonctions suivantes :

1. f définie par $f(z) = e^z$.
2. g définie par $g(z) = e^{az}$.
3. h définie par $h(z) = sin\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
4. k définie par $k(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
5. l définie par $l(z) = tan\, z$.
6. m définie par $m(z) = z^{1/2}$.
7. L définie par $L(z) = Log\ z$.