TD n°3 : Intégration dans le domaine complexe.

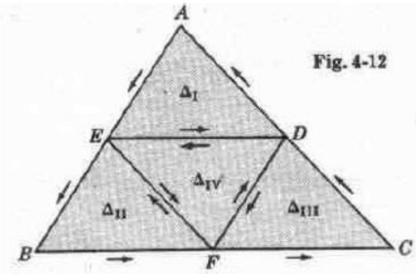
Exercice 1 : Théorème de Cauchy-Goursat pour un triangle.

Théorème de Cauchy (1825) :

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

si $z \mapsto f(z)$ est une fonction **holomorphe** dans un domaine **simplement connexe** D, et C une courbe **fermée** située dans D.

On cherche à démontrer ce théorème dans le cas où C est un triangle ABC.



On considère un triangle quelconque Δ tel que ABC dan figure 4.12, situé dans le plan de la variable z. On joint les lieux respectifs D, E et F de AB, AC et BC et l'on forme a quatre triangles notés Δ_{I}, Δ_{II}, Δ_{III} et Δ_{IV}.

1. Montrer que :

$$\boxed{\left|\oint_\Delta f(z)dz\right| \leq \left|\oint_{\Delta_I} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{II}} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{III}} f(z)dz\right| + \left|\oint_{\Delta_{IV}} f(z)dz\right|} \quad (1) .$$

2. On considère Δ_1 le triangle correspondant au terme de droite de (1) qui a la plus grande valeur, puis Δ_2 celui obtenu en joignant les milieux des côtés de Δ_1 qui a la plus grande valeur. On itérant le procédé, montrer que :

$$\boxed{\left|\oint_\Delta f(z)dz\right| \leq 4^n \left|\oint_{\Delta_n} f(z)dz\right|} \quad (2)$$

3. On suppose connu les résultants suivants :
   - $\oint_\Delta dz = \oint_\Delta zdz = \oint_\Delta (z - z_0)dz = 0.\ \Delta\, courbe\ fermée$
   - $Si\ f\ analytique\ en\ z_0 :\ \forall \varepsilon > 0 , \exists \delta\ tq\ |z - z_0| \leq \delta\ implique\ |\eta| \leq \varepsilon$
     $$f(z) = f(z_0) + f^{'}(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$$

   Montrer que : $\boxed{\oint_{\Delta_n} f(z)dz = \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0)dz}$ (3)

4. Démontrer alors le théorème.

Exercice 2

Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour tout contour polygonal fermé.

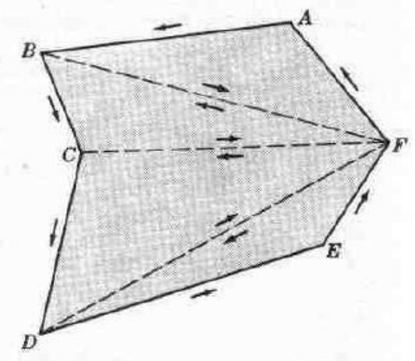


Fig. 4-14

Exercice 3

Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour toute courbe fermée simple.

Exercice 4.

Démontrer le théorème de Cauchy-Goursat pour des ouverts multiplement connexes.

Exercice 5.

Soit f une fonction analytique dans un ouvert simplement connexe R et soient a et z des points de R.

Démontrer que :

1. $F(z) = \int_a^z f(u)du$ est analytique dans R.
2. $F^{'}(z) = f(z)$.

Exercice 6.

Une fonction F telle que $F^{'}(z) = f(z)$ est appelée intégrale indéfinie de f et est notée $\int f(z)dz$

1. Montrer que : $\int \sin z\, dz = -\cos z + c$.
2. Montrer que : $\int \frac{1}{z} dz = Log\ z + c$

Exercice 7.

Soit $f(z)$ une fonction analytique dans un ouvert connexe $\mathcal{R}$ limité par deux courbes fermées simples C_1 et C_2 (ombré dans la Fig. 4-19), et aussi sur C_1 et C_2. Démontrer que $\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$ où C_1 et C_2 sont décrites dans le sens positif relatif à leur intérieur [le sens contraire des aiguilles d'une montre dans la Fig. 4-19]