TD n°4 : Séries Entières

Théorèmes sur les séries entières

Exercice 1 : .

Théorème 1

Si une série $\sum a_n z^n$ converge pour $z = z_0 \neq 0$, alors elle converge :

1°) Absolument pour : $|z| < |z_0|$.

2°) Uniformément pour : $|z| \leq |z_1|$ où $|z_1| < |z_0|$

Théorème 2

Une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et sa dérivée $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

Exercice 2 :

Montrer que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ a une valeur finie en tout point intérieur à son cercle de convergence ou sur celui-ci, mais que ce n'est pas vrai pour la série dérivée.

Théorème de Taylor.

Théorème de Taylor

Si la fonction d'une variable complexe f est analytique (holomorphe) à l'intérieure du cercle $\mathcal{C}$ centré en a, alors pour tout complexe z à l'intérieur de $\mathcal{C}$:

$$\boxed{f(z) = f(a) + f'(a)\frac{(z-a)}{1!} + f''(a)\frac{(z-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(z-a)^3}{3!} + \ldots\ldots}$$

Exercice 3

Soit f définie par : $f(z) = Log(1+z)$, sur la branche qui prend la valeur 0 pour $z = 0$.

1. Montrer en développant f en série de Taylor au voisinage de $z = 0$ que

$$\boxed{f(z) = Log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n}$$

2. Déterminer le rayon de cv de cette série.

3. Développer la fonction g définie par : $g(z) = Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$

Exercice 4

Soit f définie par : $f(z) = sin\, z$.

1. Montrer en développant f en série de Taylor au voisinage de $z = \frac{\pi}{4}$ que

$$\boxed{f(z) = sin\, z \; = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}{1!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \cdots ..\right\}}$$

2. Déterminer le rayon de cv de cette série.

Séries de Laurent.

Exercice 5

Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

1. $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z = 1.$
2. $g(z) = (z-3)\sin\frac{1}{z+2}$; $z = -2.$
3. $h(z) = \frac{z - \sin z}{z^3}$; $z = 0.$
4. $i(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -2.$
5. $j(z) = \frac{1}{z^2(z-3)^2}$; $z = 3.$

Exercice 6

Développer la fonction f définie par $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent pour :

a) $1 < |z| < 3.$
b) $|z| > 3.$
c) $0 < |z+1| < 2$
d) $|z| < 1.$