TD n°6 : Fourier - Correction

Séries de Fourier

Coefficient de Fourier

On considère une fonction f continue par morceaux et T-périodique.

$$\boxed{c_n(f) = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-in\frac{2\pi}{T}t}\,dt} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\boxed{a_n(f) = \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \quad ; \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$a_n = c_n + c_{-n} \quad ; \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \;;\; c_n = \frac{a_n - i\,b_n}{2}$$

__Cas pratique :__

Si f est paire :	Si f impaire
$\begin{cases} b_n = 0 \\ a_n(f) = 2\times\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \end{cases}$	$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n(f) = 2\times\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)\,dt \end{cases}$

Série de Fourier de f

$$\boxed{Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}x\right) + b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}x\right)}$$

$$\boxed{Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{in\frac{2\pi}{T}x}}$$

Théorème de Dirichlet (1829)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{C^1}$ **par morceaux** sur $\left]-\frac{T}{2}\,;\frac{T}{2}\right]$ et T-périodique.

$$Pour\ tout\ réel\ x\ :\ \boxed{Sf(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}}$$

Théorème de Parseval

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, **continue par morceaux** sur $\left]-\frac{T}{2}\,;\frac{T}{2}\right]$ et T-périodique.

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2\,dt} \quad ou \quad \boxed{\frac{{a_0}^2}{\boxed{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2 = \frac{\boxed{2}}{T}\int_T |f(t)|^2\,dt}$$

On écrit aussi :

$$\boxed{\left(\frac{a_0}{\mathbf{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 + b_n{}^2\right) = \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2\,dt}$$

Exercice 1 :

Soit f 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi;\pi]$.

1. **Montrer que :** $\boldsymbol{Sf(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}}$

On a $a_n(f) = 0$ (car f est impaire) et par IPP

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)\,dt = -2\frac{\cos n\pi}{n} + 2\frac{\sin n\pi}{n^2\pi} = -\mathbf{2}\frac{(-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \boxed{b_n(f) = -\mathbf{2}\frac{(-1)^{\boldsymbol{n}}}{\boldsymbol{n}}}$ Donc on obtient le résultat demandé.

2. **Convergence**.

   a. **Montrer que :** $\boldsymbol{\forall x \in\ ]-\pi;\pi[\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n} = \frac{x}{2}}$

   La fonction f n'est pas continue sur $]-\pi;\pi]$ puisque $f(\pi) = \pi$ mais $\lim_{-\pi^+} f(x) = -\pi$.
   Il y a donc une discontinuité en $x = \pm\pi$.
   Elle est bien $\boldsymbol{C^1}$ **par morceaux** puisqu'elle est C^1 sur $]-\pi;\pi[$. le théorème de Dirichlet affirme donc que la série va converger vers x sur $]-\pi;\pi[$ et vers $\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = 0$ pour $x = \pm\pi$.

   On obtient donc le résultat demandé.

   b. **Etudier le cas où** $\boldsymbol{x = \pi}$.
   Dans ce cas, tous les termes de la série sont nuls, et la somme est bien nulle comme attendue.

3. **Cas particulier. Montrer que :** $\boldsymbol{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots\dots}$

   Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la série alternée demandée.

4. **Application du Théorème de Parseval : Montrer que :** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$

   En appliquant la formule de Parseval, ce qui est l légitime car f est **continue par morceaux** sur $]-\pi;\pi]$ donc

$$\frac{a_0{}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 + b_n{}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n{}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-2\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \\ \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}^2} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{\mathbf{6}}}$$

Exercice 2 :

Soit f 2π-périodique, impaire, définie par : $\begin{cases} f(x) = 1 & \text{sur }]0;\pi[\\ f(n\pi) = 0 & pour\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

1. Représenter f.
2. **Montrer que :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x)}$

On a $a_n(f) = 0$ (car f est impaire) et par IPP, $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\ dt = \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\ \ , b_{2p} = 0\,, \qquad b_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)}}$$

f définie sur $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{C^1}$ **par morceaux** sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique donc on peut appliquer le théorème de Dirichlet

La série de Fourier réelle de f converge simplement et a pour somme la régularisée $\tilde{f}$ de f. Or ici f est égale à sa régularisée, donc on obtient le résultat demandé.

3. **Montrer que :** $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$. Il suffit de prendre $x = \frac{\pi}{2}$
4. **Montrer que :** $\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$

On peut appliquer la formule de Parseval puisque f est continue par morceaux.

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2 + {b_n}^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\ dt$$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} {b_n}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2n+1)}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\ dt = \frac{1}{\pi}(2\pi) = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}}$$

5. **En déduire que :** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$, ***et que*** $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}}$

Comme

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

On peut passer à la limite (en N) car toutes ces séries converges donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad donc \quad : \quad \boxed{\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{8}\ \ donc\ \ \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}}$$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier (notée $\mathcal{F}$ ou TF) d'une fonction f donnée est une opération qui transforme une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ en une autre fonction notée $\hat{f}$ *ou* F. $\mathcal{F}: f \longrightarrow \hat{f}\ (ou\ F)$

$$\boxed{\hat{f}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{ixt}\,dt}$$

Remarque : Cette définition est celle adoptée par les physiciens, on peut aussi définir $\hat{f}$ sans le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Il suffit en fait que le produit des constantes dans (1) et (2) fasse $1/2\pi$

Existence : Une condition suffisante d'existence de $\hat{f}$ est que la fonction f soit *absolument intégrable*.

La transformée de Fourier inverse. Soit f une fonction donnée admettant une TF

$$\boxed{\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)e^{-ixt}\,dt}$$

Exercice 3 :

Calculer la TF f pour f définie par : $\begin{cases} f(x)=1 & \text{si } |x|\le a \\ f(x)=0 & sinon\end{cases}$

Réponse :

$$Si\ a\ non\ nul,\quad \hat{f}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin ax}{a},\qquad et\ \ pour\ a=0\ \ \hat{f}(x)=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Exercice 4 :

1. Montrer que si **f est paire** :

$$\boxed{\hat{f}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\cos xt\ \,dt}\ et\ que\ \boxed{f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\hat{f}(t)\cos xt\ \,dt}$$

2. Montrer que si **f est impaire** :

$$\boxed{\hat{f}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}f(t)\sin xt\ \,dt}\ et\ que\ \boxed{f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\hat{f}(t)\sin xt\ \,dt}$$

Exercice 5 :

1. Montrer que la TF f pour f définie par : $\begin{cases} f(x)=1-x^2 & \text{si } |x|\le 1 \\ f(x)=0 & \text{si } |x|>1\end{cases}$ est

$$\hat{f}(x)=2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$

2. Montrer que :

$$\int_0^{\infty} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \cos\frac{x}{2}\, dx = \frac{3\pi}{16}$$

Exercices complémentaires autocorrectifs :

Exercice 6 :

Soit f 2π-périodique, paire, définie par : $\forall\, x \in [0;\pi], f(x) = x$.

1. **Montrer que :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos\,(2n+1)x$

On a $\boxed{b_n(f) = 0}$ (car f est paire) et par IPP $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(nt)\ dt = \frac{2}{\pi n^2}\,((-1)^n - 1) \\ a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\ dt = \pi \end{cases}$

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}\ ,\ \boxed{a_{2p+1}(f) = \dfrac{-4}{\pi(2p+1)^2}} \\ \boxed{a_0(f) = \pi} \end{cases}$$

2. **En déduire que :** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

On prend $x = 0$.

Exercice 7 :

Soit f 2π-périodique, impaire, définie par : $\forall\, x \in [0;\pi], f(x) = sin^2\, x$.

1. **Montrer que :** $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = \frac{-8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \sin(2n+1)x$

$$\boxed{\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\,, a_n = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*\,, b_{2p} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}\,, b_{2p+1} = \dfrac{-8}{\pi(2p-1)(2p+1)(2p+3)} \end{cases}}$$

2. **En déduire que :** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{-\pi}{8}$

Avec $x = \pi/2$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2(2n+1)^2(2n+3)^2} = \frac{3\pi^2}{256}$

On applique Parseval

Exercice 8 :

1. **En utilisant le résultat de l'exercice 3, montrer que** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at\cos xt}{t}\, dt = \begin{cases} \pi & si\ |x| < a \\ \frac{\pi}{2} & si\ |x| = a \\ 0 & si\ |x| > a \end{cases}$

La transformée de Fourier inverse. $\boxed{\frac{f(x^-)+f(x^+)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(t)e^{-ixt}\ dt}$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{sin\,ax}{a}e^{-ixt}\,dt=\begin{cases}1 & si\ |x|<a\\ \frac{1}{2} & si\ |x|=a\\ 0 & si\ |x|>a\end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin\,ax}{a}\cos xt\,\,dt+i\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sin\,ax}{a}\sin xt\,\,dt=\begin{cases}1 & si\ |x|<a\\ \frac{1}{2} & si\ |x|=a\\ 0 & si\ |x|>a\end{cases}$$

La partie imaginaire est nulle (fonction impaire) donc on obtient le résultat demandé.

2. En déduire que : $\int_{\mathbf{0}}^{+\infty}\frac{\mathbf{sin}\,\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{t}}\,\boldsymbol{dt}=\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$

Suffit de prendre $x=0\ et\ a=1$.