Math93.com

DM - Première ES

Second degré

Exercice 1. Coût et chiffre d'affaire : Ex 148 page

On note x sur l'intervalle $[2;24]$ le nombre de montres produites par jour.
On appelle $C(x)$ le coût total journalier de fabrication (en euros) et $R(x)$ la recette totale journalière (en euros) :

$$R(x) = 20x \text{ et } C(x) = x^2 - 4x + 80$$

1.

1. a. Calculer $R(4)$ et $R(20)$.

$$\boxed{R(4) = 80} \text{ et } \boxed{R(20) = 400}$$

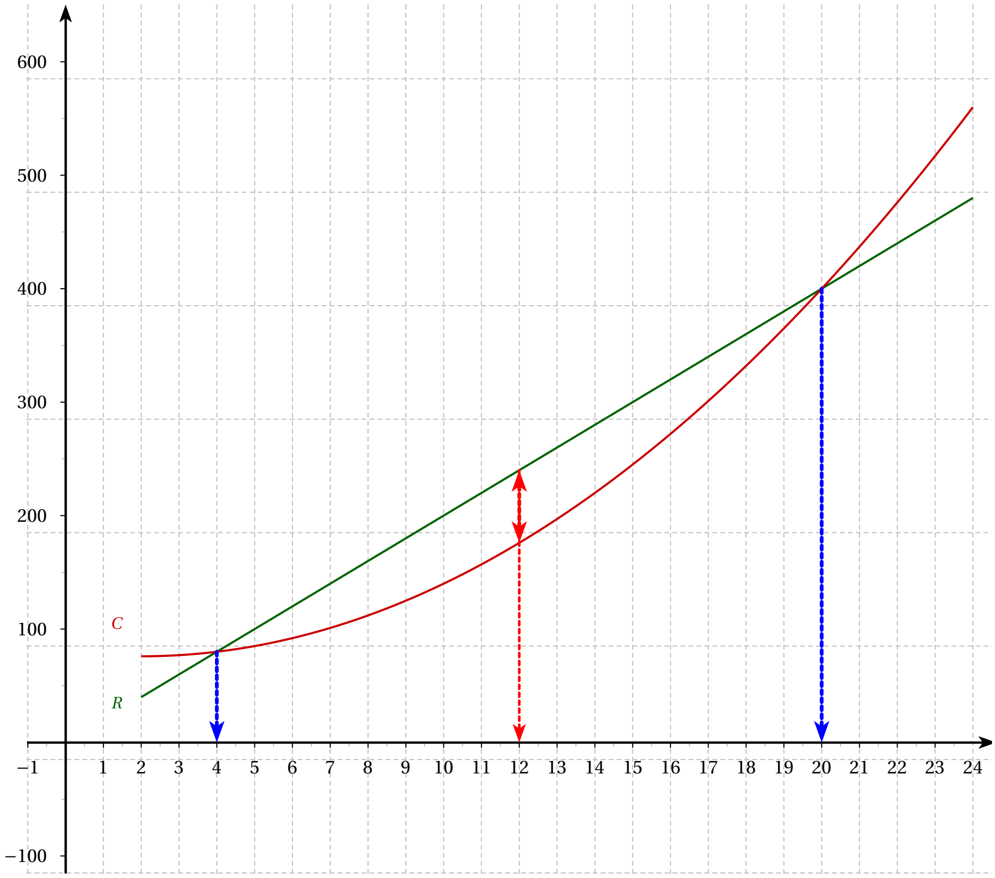
1. b. Représentations graphiques.

- La fonction R.
  La fonction recette R est un fonction linéaire donc la courbe représentative est une droite passant par l'origine de repère et par le point de coordonnée $(20\,;\ R(20) = 400)$.
- La fonction C.
  - La fonction coût C est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = & 1 \\ b = & -4 \\ c = & 80 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = & b^2 - 4ac & = -304 < 0 \\ \alpha = & \dfrac{-b}{2a} & = 2 \\ \beta = & \dfrac{-\Delta}{4a} & = 76 \end{cases}$$

  - Le coefficient $a = 1$ étant positif, la fonction $x \longmapsto x^2 - 4x + 80$, définie sur $\mathbb{R}$, est décroissante sur $]-\infty; 2]$ puis croissante sur $[2; +\infty[$.
  - La fonction C est elle définie sur l'intervalle $[2\,;\,24]$ (c'est une restriction de la fonction précédente). C est donc strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,24]$.

x	2		24
C	$C(2) = 76$	$\nearrow$	$C(24) = 560$



2.

2. a. On note $B(x)$ le bénéfice journalier : $B(x) = R(x) - C(x)$. Calculer $B(x)$.
Pour tout x de l'intervalle [2 ; 24] on a :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 20x - \left(x^2 - 4x + 80\right) = \underline{-x^2 + 24x - 80}$$

2. b. A l'aide des résultats de la question 1., déterminer les valeurs de x pour lesquelles le résultat journalier est un bénéfice.
Le résultat journalier est un bénéfice lorsque les recettes sont supérieures aux coûts, donc quand la courbe de R est au-dessous de celle de C, soit <u>entre 4 et 20 montres produites</u>.

3. On souhaite déterminer x pour que le bénéfice soit maximal.

3. a. Montrer que : $B(x) = -(x-12)^2 + 64$.
Par un développement on a facilement :

$$-(x-12)^2 + 64 = -(x^2 - 24x + 144) + 64 = -x^2 + 24x - 80 = B(x)$$

3. b. Dresser le tableau de variations de la fonction B.

- La fonction B est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & -1 \\ b = & 24 \\ c = & -80 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} \Delta = & b^2 - 4ac & = 256 > 0 \\ \alpha = & \dfrac{-b}{2a} & = 12 \\ \beta = & \dfrac{-\Delta}{4a} & = 64 \end{array}\right.$$

- Le coefficient $a = -1$ étant négatif, la fonction $x \longmapsto -x^2 + 24x - 80$, définie sur $\mathbb{R}$, est croissante sur $]-\infty; 12]$ puis décroissante sur $[12; +\infty[$.
- La fonction B est elle définie sur <u>l'intervalle [2 ; 24]</u> (c'est une restriction de la fonction précédente). B est croissante sur $[2; 12]$ puis décroissante sur $[12; 24]$.

x	2		12		24
B			$B(12) = 64$		
	$B(2) = -36$	↗		↘	$B(24) = -80$

3. c. Combien de montres faut-il produire pour réaliser un bénéfice maximal? Quel est alors le montant de ce bénéfice maximal?

Le bénéfice maximal est donc de 64 euros, il est atteint pour une production de 12 montres.