



Math93.com

# Devoir Surveillé n°4A

## Correction

### Première ES/L

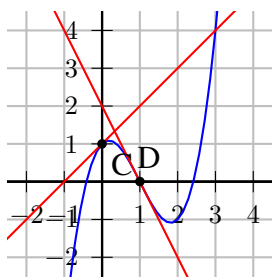
#### Dérivation

Durée 1 heure - Coeff. 4

Noté sur 20 points

### Exercice 1. Lecture graphique puis calculs

2 points



1. Lecture du nombre dérivé :  $g'(0) = 1$ .
2. Équation de  $T_0$  :  $T_0 : y = x + 1$ .
3. Lecture du nombre dérivé :  $g'(1) = -2$ .
4. Équation de  $T_1$  :  $T_1 : y = -2x + 2$ .

### Exercice 2. Le cours : A compléter

4 points

Ici  $u$  et  $v$  sont des fonctions dérivables sur  $I$  et  $k$  est une constante.

$I$	$f$ de la forme	Dérivée de $f$
$I$	$k \times u$	$ku'$
$I$	$u + v$	$u' + v'$
$I$	$u \times v$	$u'v + uv'$
$v$ non nul sur $I$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$v$ non nul sur $I$	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$I$	$u^2$	$2u'u$

Donner directement et sans justification la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle  $I$  :

$I$	$f$ définie sur $I$ par :	Dérivée de $f$
$[2 ; 10]$	$f_1(x) = \frac{1}{x}$	$f'_1(x) = \frac{-1}{x^2}$
$[2 ; 10]$	$f_2(x) = x^2$	$f'_2(x) = 2x$
$[2 ; 10]$	$f_3(x) = x^3 + \frac{1}{2}$	$f'_3(x) = 3x^2$
$[2 ; 10]$	$f_4(x) = \sqrt{x}$	$f'_4(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$[2 ; 10]$	$f_5(x) = 3 - \frac{x}{2}$	$f'_5(x) = -\frac{1}{2}$
$[2 ; 10]$	$f_6(x) = \frac{x^3}{3}$	$f'_6(x) = x^2$

### Exercice 3. Taux d'accroissement et nombre dérivé

3 points

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 3x + 1$ .

1. [2 points] Pour tout réels  $a$  et  $h$  on a :

$$t_f(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$t_f(h) = \frac{(a+h)^2 - 3(a+h) + 1 - (a^2 - 3a + 1)}{h}$$

$$t_f(h) = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h + 1 - a^2 + 3a - 1}{h}$$

$$t_f(h) = \frac{2ah + h^2 - 3h}{h}$$

$$t_f(h) = 2a + h - 3$$

2. [1 point] En déduire le nombre dérivé de  $f$  en  $a$ .

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a - 3$$

#### Exercice 4. Une histoire de tangentes

4.5 points

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 1$ .

1. [1 point] La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout réel  $x$  on a :

$$g'(x) = 6x^2 - 24x + 18$$

2. [2 points] L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  en  $A(2; g(2))$  est :  $T_2 : y = g'(2)(x - 2) + g(2)$

$$\begin{cases} g(2) = 5 \\ g'(2) = -6 \end{cases} \Rightarrow T_2 : y = -6(x - 2) + 5 \text{ soit } T_2 : y = -6x + 17$$

3. [1.5 points] On cherche donc les abscisses des points  $A(x_0; g(x_0))$  de  $\mathcal{C}_g$  qui admettent une tangente de coefficient directeur nul et donc tels que  $g'(x_0) = 0$ . Cela revient donc à résoudre l'équation  $g'(x) = 0$ .

$$g'(x) = 0 \iff 6x^2 - 24x + 18 = 0$$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec

$$\begin{cases} a = 6 \\ b = -24 \\ c = 18 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 144 > 0$$

Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{24 - \sqrt{144}}{12} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{24 + \sqrt{144}}{12} = 3$$

Ce sont les abscisses des points de  $\mathcal{C}_g$  qui admettent une tangente de coefficient directeur nul soit :

$$\mathcal{S} = \{1; 3\}$$

#### Exercice 5.

3.5 points

On considère la fonction  $h$  définie sur  $]-\infty; 0]$  par  $h(x) = \frac{2-x}{1-3x}$ .

1. [2 points] Déterminer la fonction dérivée de  $h$  sur  $]-\infty; 0]$ .

La fonction  $h$  est définie et dérivable sur  $]-\infty; 0]$  comme somme et composée de fonctions qui le sont.

La fonction  $h$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  donc de dérivée  $\frac{u'v - uv'}{v^2}$  avec :

$u(x) = 2 - x$	$u'(x) = -1$
$v(x) = 1 - 3x$	$v'(x) = -3$

Donc pour tout  $x$  de  $]-\infty; 0]$  :

$$h'(x) = \frac{-1 \times (1 - 3x) - (2 - x) \times (-3)}{(1 - 3x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-1 + 3x - (-6 + 3x)}{(1 - 3x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-1 + 3x + 6 - 3x}{(1 - 3x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{5}{(1 - 3x)^2}$$

2. [1.5 points] Déterminer l'équation de la tangente  $T_0$  à  $\mathcal{C}_h$  au point d'abscisse 0.  $T_0 : y = h'(0)(x - 0) + h(0)$

$$\begin{cases} h(0) = 2 \\ h'(0) = 5 \end{cases} \Rightarrow T_0 : y = 5(x - 0) + 2 \text{ soit } T_0 : y = 5x + 2$$

## Exercice 6.

3 points

1. [1.5 point] On considère la fonction  $j$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $j(x) = \frac{1}{1 + 2x^2}$ .

**Déterminer la fonction dérivée de  $j$  sur  $\mathbb{R}$ .**

La fonction  $j$  est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et composée de fonctions qui le sont.

La fonction  $j$  est de la forme  $\frac{1}{v}$  donc de dérivée  $\frac{-v'}{v^2}$  avec :

$v(x) = 1 + 2x^2$	$v'(x) = 4x$
-------------------	--------------

Donc pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :

$j'(x) = \frac{-4x}{(1 + 2x^2)^2}$
------------------------------------

2. [1.5 point] On considère la fonction  $k$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $k(x) = 2x\sqrt{x}$ .

**Déterminer la fonction dérivée de  $k$  sur  $[1; +\infty[$ .**

La fonction  $k$  est définie et dérivable sur  $[1; +\infty[$  comme somme et composée de fonctions qui le sont.

La fonction  $k$  est de la forme  $uv$  donc de dérivée  $u'v + uv'$  avec :

$u(x) = 2x$	$u'(x) = 2$
$v(x) = \sqrt{x}$	$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Donc pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$  :

$$k'(x) = 2 \times \sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{x}}$$

$$k'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x \times \sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}$$

$$k'(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x \times \sqrt{x}}{x}$$

$$k'(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$k'(x) = 3\sqrt{x}$
---------------------