Math93.com

Devoir Surveillé n°3A Correction

Première ES

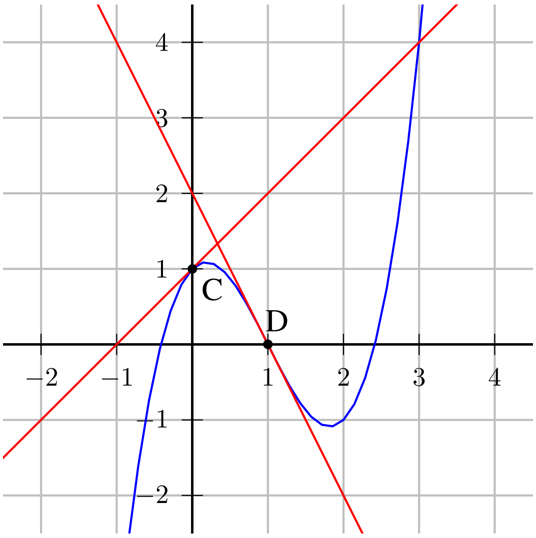
Dérivation

Durée 0,5 heure - Coeff. 3

Noté sur 20 points

Exercice 1. Lecture graphique puis calculs — 2 points

On a tracé $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_g$ aux points C et D d'abscisses respectives 0 et 1. Lire les nombres dérivés $g'(0)$ et $g'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ aux points C et D.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(0) = 1$$

2. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $C(0\ ;\ 1)$:

$$T_0\ :\ y = x + 1$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(1) = -2$$

4. Équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $D(1\ ;\ 0)$:

$$T_1\ :\ y = -2x + 2$$

Exercice 2. Cours : Taux de variation et nombre dérivé — 4 points

Compléter les définitions et proposions suivantes :

Définition 1 (Taux de variation)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle taux de variation de f entre a et $a+h$, (avec a et $a+h$ appartenant à I) le réel :

$$t(h) = \frac{f(a+f) - f(a)}{h}$$

Définition 2 (Nombre dérivé $f'(a)$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** en a, si et seulement si, le rapport $t(h)$ tend vers un réel L lorsque h tend vers 0.
Le réel L est appelé **nombre dérivé** de f en a, on le note $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} t(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Propriété 1 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$. Son équation est donnée par :

$$\boxed{T\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Exercice 3. Taux de variation et nombre dérivé — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

1. [2 points] Pour tout réels a et h on a :

$$t_f(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
$$t_f(h) = \frac{(a+h)^2 - 3(a+h) + 1 - \left(a^2 - 3a + 1\right)}{h}$$
$$t_f(h) = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 3a - 3h + 1 - a^2 + 3a - 1}{h}$$
$$t_f(h) = \frac{2ah + h^2 - 3h}{h}$$
$$t_f(h) = \frac{h(2a + h - 3}{h}$$
$$\boxed{t_f(h) = 2a + h - 3}$$

2. [1 point] En déduire le nombre dérivé de f en a.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} t(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a - 3}$$

3. [2 points] L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-1\ ;\ f(-1))$ est :

$$T\ :\ y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f(-1) & = 5 \\ f'(-1) & = -5 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T\ :\ y = -5(x+1) + 5$$

soit

$$\boxed{T\ :\ y = -5x}$$

Exercice 4. Une histoire de tangentes — 5 points

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$.

1. [1 point] La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout réel x on a :

$$\boxed{g'(x) = 9x^2 - 4x + 1}$$

2. [2 points] L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $A(-1\ ;\ g(-1))$ est : $T_{-1}\ :\ y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1)$

$$\left\{\begin{array}{ll} g(-1) & = -7 \\ g'(-1) & = 14 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T_{-1}\ :\ y = 14(x+1) - 7 \text{ soit } \boxed{T_{-1}\ :\ y = 14x + 7}$$

3. [2 points] On cherche donc les abscisses des points $A(x_0\ ;\ g(x_0))$ de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente de coefficient directeur 2 et donc tels que $g'(x_0) = 2$.
Cela revient donc à résoudre l'équation $g'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} g'(x) = 2 &\iff 9x^2 - 4x + 1 = 2 \\ &\iff 9x^2 - 4x - 1 = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = 9 \\ b & = -4 \\ c & = -1 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \Delta = 52 > 0$$

Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles qui sont les abscisses les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente de coefficient directeur 2 soit :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{4 - \sqrt{52}}{18}\ ;\ \frac{4 + \sqrt{52}}{18}\right\} = \left\{\frac{2 - \sqrt{13}}{9}\ ;\ \frac{2 + \sqrt{13}}{9}\right\}}$$

Exercice 5. Une histoire de tangentes — 4 points

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1 - 4x)^2$.

1. [2 points] Développons tout d'abord l'expression $h(x)$.
Pour tout réel x on a :

$$h(x) = 16x^2 - 8x + 1$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout réel x on a :

$$\boxed{h'(x) = 32x - 8}$$

2. **[2 points]** L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ en $A\left(0\ ;\ h(0)\right)$ est : $T_0\ :\ y = h'(0)(x-0)+h(0)$

$$\left\{\begin{array}{ll} h(0) & = 1 \\ h'(0) & = -8 \end{array}\right| \Rightarrow T_0\ :\ y = -8(x+0)+1 \text{ soit } \boxed{T_{-1}\ :\ y = -8x+1}$$