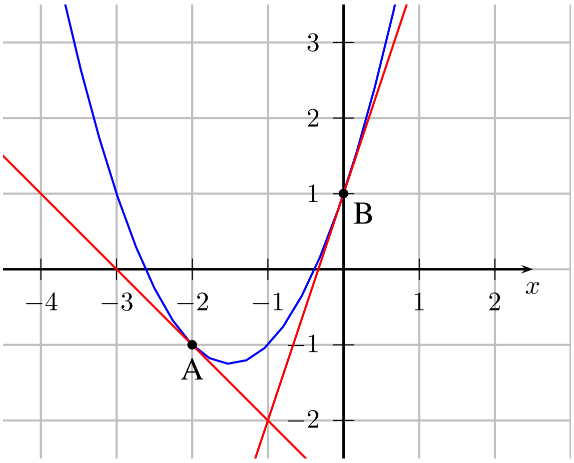
Math93.com

Devoir Surveillé n°3A
Correction
Première ES
Dérivation
Durée 0,5 heure - Coeff. 3
Noté sur 20 points

Exercice 1. Lecture graphique puis calculs — 2 points

On a tracé $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_g$ aux points C et D d'abscisses respectives 0 et 1. Lire les nombres dérivés $g'(0)$ et $g'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ aux points C et D.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(-2) = -1$$

2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-2\ ;\ -1)$:

$$T_{-2}\ :\ y = -x - 3$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = 3$$

4. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $B(0\ ;\ 1)$:

$$T_0\ :\ y = 3x + 1$$

Exercice 2. Cours : Taux de variation et nombre dérivé — 4 points

Compléter les définitions et proposions suivantes :

Définition 1 (Taux de variation)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle taux de variation de f entre a et $a+h$, (avec a et $a+h$ appartenant à I) le réel :

$$t(h) = \frac{f(a+f) - f(a)}{h}$$

Définition 2 (Nombre dérivé $f'(a)$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** en a, si et seulement si, le rapport $t(h)$ tend vers un réel L lorsque h tend vers 0.
Le réel L est appelé **nombre dérivé** de f en a, on le note $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} t(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Propriété 1 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$. Son équation est donnée par :

$$\boxed{T\ :\ y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Exercice 3. Taux de variation et nombre dérivé — 5 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

1. **[2 points]** Pour tout réels a et h on a :

$$t_f(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
$$t_f(h) = \frac{(a+h)^2 - 4(a+h) + 1 - \left(a^2 - 4a + 1\right)}{h}$$
$$t_f(h) = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 4a - 4h + 1 - a^2 + 4a - 1}{h}$$
$$t_f(h) = \frac{2ah + h^2 - 4h}{h}$$
$$t_f(h) = \frac{h(2a + h - 4}{h}$$
$$\boxed{t_f(h) = 2a + h - 4}$$

2. **[1 point]** En déduire le nombre dérivé de f en a.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h\to 0} t(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 2a - 4}$$

3. **[2 points]** L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-1\ ;\ f(-1))$ est :

$$T\ :\ y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} f(-1) & = 6 \\ f'(-1) & = -6 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T\ :\ y = -6(x+1) + 6$$

soit

$$\boxed{T\ :\ y = -6x}$$

Exercice 4. Une histoire de tangentes — 5 points

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$.

1. **[1 point]** La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont. Pour tout réel x on a :

$$\boxed{g'(x) = 6x^2 - 8x + 1}$$

2. **[2 points]** L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $A(-1\ ;\ g(-1))$ est : $T_{-1}\ :\ y = g'(-1)(x - (-1)) + g(-1)$

$$\left\{\begin{array}{ll} g(-1) & = -8 \\ g'(-1) & = 15 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T_{-1}\ :\ y = 15(x+1) - 8 \ \text{ soit } \boxed{T_{-1}\ :\ y = 15x + 7}$$

3. **[2 points]** On cherche donc les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente de coefficient directeur 2. cela revient donc à résoudre l'équation $g'(x) = 2$.

$$\begin{aligned} g'(x) = 2 &\iff 6x^2 - 8x + 1 = 2 \\ &\iff 6x^2 - 8x - 1 = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = 6 \\ b & = -8 \\ c & = -1 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \Delta = 88 > 0$$

Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles qui sont les abscisses les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente de coefficient directeur 2 soit :

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{8 - \sqrt{88}}{12}\ ;\ \frac{8 + \sqrt{88}}{12}\right\} = \left\{\frac{4 - \sqrt{22}}{6}\ ;\ \frac{4 + \sqrt{22}}{6}\right\}}$$

Exercice 5. Une histoire de tangentes — 4 points

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (1 - 3x)^2$.

1. **[2 points]** Développons tout d'abord l'expression $h(x)$.
Pour tout réel x on a :

$$h(x) = 9x^2 - 6x + 1$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions qui le sont. Pour tout réel x on a :

$$\boxed{h'(x) = 18x - 6}$$

2. **[2 points]** L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_h$ en $A(0\ ;\ h(0))$ est : $T_0\ :\ y = h'(0)(x - 0) + h(0)$

$$\left\{\begin{array}{ll} h(0) & = 1 \\ h'(0) & = -6 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow T_0\ :\ y = -6(x+0) + 1 \ \text{ soit } \boxed{T_{-1}\ :\ y = -6x + 1}$$