



Math93.com

Interrogation n°5

Correction

Première ES

Dérivation

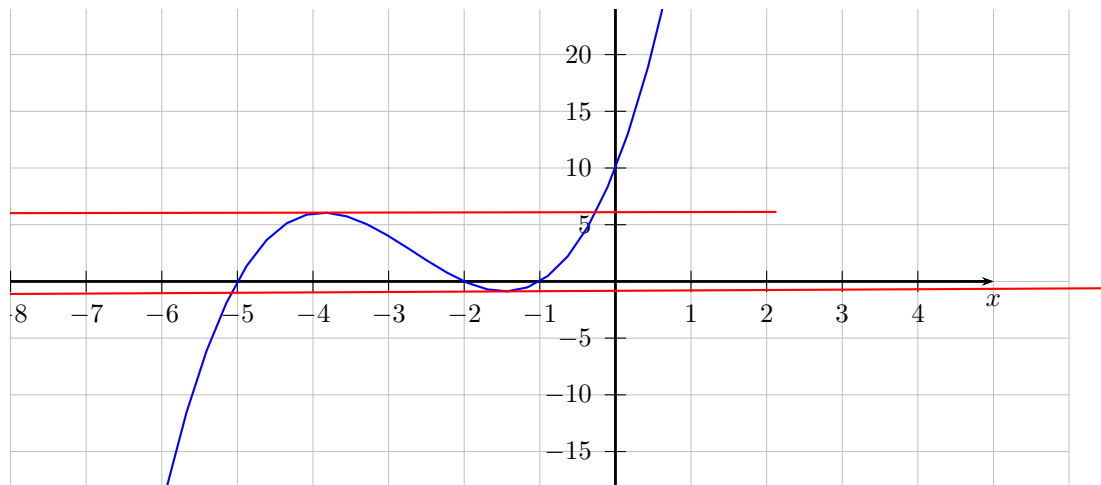
Durée 0.5 heure - Coeff. 2

Noté sur 20 points

Exercice 1. Dérivée et tangente

8 points

On a tracé \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = x^3 + 8x^2 + 17x + 10 \end{cases}$



- Déterminer la dérivée de $f : \forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 3x^2 + 16x + 17$
- Déterminer l'équation de T , la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse -3 et la construire sur le graphique ci-dessus.
L'équation de T est : $T : y = f'(-3)(x + 3) + f(-3)$

$$\begin{cases} f(-3) & = 4 \\ f'(-3) & = -4 \end{cases} \Rightarrow T : y = -4(x + 3) + 4$$

soit

$$(T) : y = -4x - 8$$

- Les abscisses des points de \mathcal{C}_f ayant une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 + 16x + 17 = 0$$

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec

$$\begin{cases} a & = 3 \\ b & = 16 \\ c & = 17 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 52 > 0$$

Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles qui sont les abscisses des points de \mathcal{C}_f qui admettent une tangente de horizontale donc de coefficient directeur 0 soit :

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-16 - \sqrt{52}}{6} ; \frac{-16 + \sqrt{52}}{6} \right\} = \left\{ \frac{-8 - \sqrt{13}}{3} ; \frac{-8 + \sqrt{13}}{3} \right\} \simeq \{-3,87 ; -1,46\}$$

Exercice 2. Dérivée et tangente**12 points**

Pour les fonctions suivantes définies sur I , déterminer la fonction dérivée et l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

1. Avec g la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$.

La fonction g est définie et dérivable sur I . On peut remarquer, mais ce n'était pas demandé, que le numérateur n'est jamais nul car pour tout réel x , le carré x^2 est positif et donc $x^2 + 1 \geq 1$.

La fonction g est de la forme $\frac{u}{v}$ et donc de fonction dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec

$u(x) = x + 1$	$u'(x) = 1$
$v(x) = x^2 + 1$	$v'(x) = 2x$

Pour tout réel x de $I = \mathbb{R}$ on a donc

$$g'(x) = \frac{1 \times (x^2 + 1) - (x + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

L'équation de T_1 la tangente au point d'abscisse 1 est $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} g(1) = 1 \\ g'(1) = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow T : y = -\frac{1}{2}(x - 1) + 1 \text{ soit } (T_1) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

2. Avec h la fonction définie sur $I = \mathbb{R}_+^*$ par : $h(x) = \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}$.

La fonction h est définie et dérivable sur I .

On a alors directement en appliquant les formules du cours et pour tout réel x de $I = \mathbb{R}_+^*$:

$$h'(x) = \frac{3x^2}{3} + 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

L'équation de T_2 la tangente au point d'abscisse 1 est $y = h'(1)(x - 1) + h(1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} h(1) = \frac{17}{6} \\ h'(1) = 2 \end{array} \right. \Rightarrow T : y = 2(x - 1) + \frac{17}{6} \text{ soit } (T_2) : y = 2x + \frac{5}{6}$$

3. Avec i la fonction définie sur $I = \mathbb{R}$ par : $i(x) = (x^2 - 2x + 3)^2$.

La fonction i est définie et dérivable sur I . La fonction i est de la forme u^2 et donc de fonction dérivée $2u'u$ avec

$$u(x) = x^2 - 2x + 3 \quad u'(x) = 2x - 2$$

Pour tout réel x de $I = \mathbb{R}$ on a donc

$$i'(x) = 2(2x - 2)(x^2 - 2x + 3)$$

L'équation de T_3 la tangente au point d'abscisse 1 est $y = i'(1)(x - 1) + i(1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} i(1) = 4 \\ i'(1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow T : y = 0(x - 1) + 4 \text{ soit } (T_3) : y = 4$$

La tangente T_3 est une tangente horizontale.