



TD n°1 - Première ES

Second degré

Exercice 1. Forme canonique

Pour chacune des fonctions polynômes du second degré suivantes, déterminer la forme canonique, les coordonnées du sommet S , le tableau de variations et l'allure de la courbe.

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f : x \mapsto f(x) = (x - 2)^2 - 2x^2 + 2$$

1. a. Exprimer $f(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$:

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

1. b. Calculer

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = \dots \\ \alpha = \dots \\ \beta = \dots \end{cases}$$

1. c. Donner la forme canonique :

$$f(x) = \dots\dots\dots$$

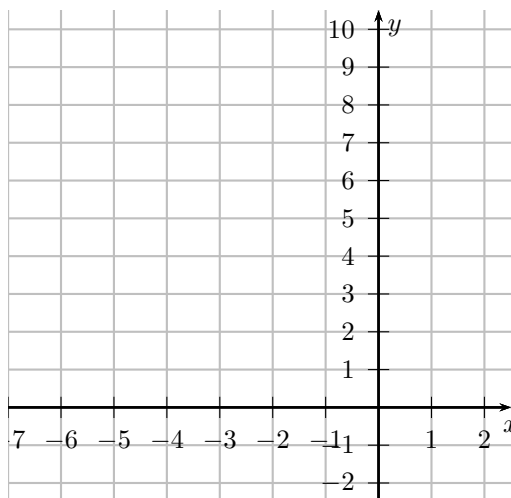
1. d. Donner le coordonnées du sommet S de la parabole :

$$S(\dots ; \dots)$$

1. e. Dresser le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$	\dots	$+\infty$
$f(x)$			

1. f. Construire \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f .



1. g. Déterminer par lecture graphique les coordonnées des points d'intersection, si il existent, de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.

$$A(\dots ; \dots) ; B(\dots ; \dots)$$

2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g : x \mapsto g(x) = (-x - 2)^2 + (2x + 1)^2 - 5$$

2. a. Exprimer $g(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$:

$$g(x) = \dots\dots\dots$$

2. b. Calculer

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = \dots \\ \alpha = \dots \\ \beta = \dots \end{cases}$$

2. c. Donner la forme canonique :

$$g(x) = \dots\dots\dots$$

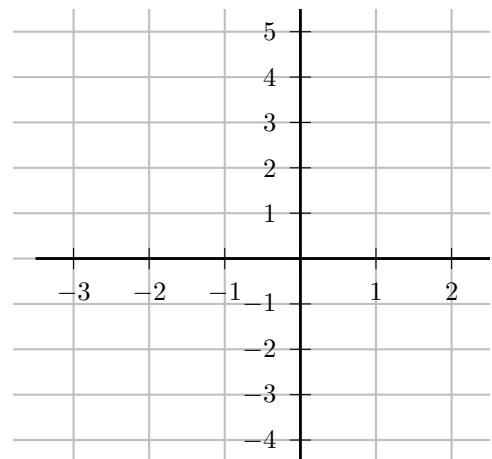
2. d. Donner le coordonnées du sommet S de la parabole :

$$S(\dots ; \dots)$$

2. e. Dresser le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$	\dots	$+\infty$
$g(x)$			

2. f. Construire \mathcal{C}_g , la courbe représentative de la fonction g .



2. g. Déterminer par lecture graphique les coordonnées des points d'intersection, si il existent, de \mathcal{C}_g avec l'axe des abscisses.

$$C(\dots ; \dots) ; D(\dots ; \dots)$$

Exercice 2. Équations

Retrouver les résultats des questions **1.g** et **2.g** de l'exercice 1 par le calcul.

Réponses : $A(-2 + \sqrt{10}; 0)$; $B(-2 - \sqrt{10}; 0)$; $C\left(-\frac{8}{5}; 0\right)$; $D(0; 0)$

Exercice 3. Équations du second degré : Niveau troisième !

Résoudre les équations suivantes de **deux façons**, en utilisant le discriminant, et en factorisant le polynôme du second degré. Vérifiez vos résultats en utilisant le **menu « Équation »** de votre calculatrice.

$$\begin{array}{l} 1. (E_1) : x^2 + 2x = 0; \\ 2. (E_2) : x^2 = -5x; \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 3. (E_3) : x^2 - 5 = 0; \\ 4. (E_4) : x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0; \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 5. (E_5) : x^2 - 2x + 1 = 0; \\ 6. (E_6) : 4x^2 + 20x + 25 = 0; \end{array} \right.$$

Réponses : $\mathcal{S}_1 = \{0; -2\}$; $\mathcal{S}_2 = \{0; -5\}$; $\mathcal{S}_3 = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$; $\mathcal{S}_4 = \left\{\frac{3}{2}\right\}$; $\mathcal{S}_5 = \{1\}$; $\mathcal{S}_6 = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

Exercice 4. Équations du second degré ... and others !

Résoudre les équations suivantes et vérifier vos résultats en utilisant le **menu « Équation »** de votre calculatrice

$$\begin{array}{l} 1. (E_1) : x^2 + 5 = 0 \\ 2. (E_2) : x^2 + x - 1 = 0 \\ 3. (E_3) : -2x^2 + 3x + 1 = 0 \\ 4. (E_4) : x^2 + 2x + 1 = 1 - 3x \\ 5. (E_5) : (x + 1)(5x^2 + 2x - 1) = 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 6. (E_6) : (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0 \\ 7. (E_7) : (x^2 + 6x + 9)(x^2 + x + 1) = 0 \\ 8. (E_8) : (x + 1)^2 - 2(x - 2)^2 = 0 \\ 9. (E_9) : 2x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 10. (E_{10}) : \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} = 0 \\ 11. (E_{11}) : \frac{x^2 - 2x - 3}{(x + 1)^2} = 0 \\ 12. (E_{12}) : \frac{x^2 + x - 3}{2x + 5} = \frac{2(x - 4)}{5} \end{array} \right.$$

Réponses :

$$\mathcal{S}_1 = \emptyset; \mathcal{S}_2 = \left\{\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right\}; \mathcal{S}_3 = \left\{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}; \frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right\}; \mathcal{S}_4 = \{-5; 0\}$$

$$\mathcal{S}_5 = \left\{-1; \frac{-1 - \sqrt{6}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{6}}{2}\right\}; \mathcal{S}_6 = \{-1; 1\}; \mathcal{S}_7 = \{-3\}; \mathcal{S}_8 = \{5 + 3\sqrt{2}; 5 - 3\sqrt{2}\}; \mathcal{S}_9 = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right\}$$

$$; \mathcal{S}_{10} = \{1; 4\}; \mathcal{S}_{11} = \{3\}; \mathcal{S}_{12} = \left\{\frac{9 - \sqrt{205}}{2}; \frac{9 + \sqrt{205}}{2}\right\}$$

Exercice 5. Équations bicarrées

En posant $X = x^2$, résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. (E_1) : x^4 - 5x^2 + 4 = 0; \\ 2. (E_2) : -2x^4 + 22x^2 - 36 = 0; \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 3. (E_3) : x^4 + x^2 - 2 = 0; \\ 4. (E_4) : 5x^4 - 2x^2 + 1 = 0; \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} 5. (E_5) : 3x^4 + 24x^2 + 45 = 0; \\ 6. (E_6) : -2x^4 + 3x^2 + 1 = 0; \end{array} \right.$$

Remarque : Ne pas oublier que l'équation $x^2 = b$, avec $b > 0$ a deux solutions réelles, \sqrt{b} et $-\sqrt{b}$.

Réponses : $\mathcal{S}_1 = \{-2; -1; 1; 2\}$; $\mathcal{S}_2 = \{-3; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 3\}$; $\mathcal{S}_3 = \{-1; 1\}$; $\mathcal{S}_4 = \emptyset$

$$; \mathcal{S}_5 = \emptyset; \mathcal{S}_6 = \left\{\sqrt{\frac{3 + \sqrt{17}}{4}}; -\sqrt{\frac{3 + \sqrt{17}}{4}}\right\}$$

Exercice 6. Degré 4

Soit P la fonction définie sur \mathbb{R} par $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 9x + 18$.

1. Vérifier que pour tout réel x on a : $P(x) = (x^2 + x - 2)(4x^2 - 9)$.

2. En déduire les racines de la fonction polynôme $P(x)$ et la factorisation complète de $P(x)$ (en produit de binômes du premier degré).

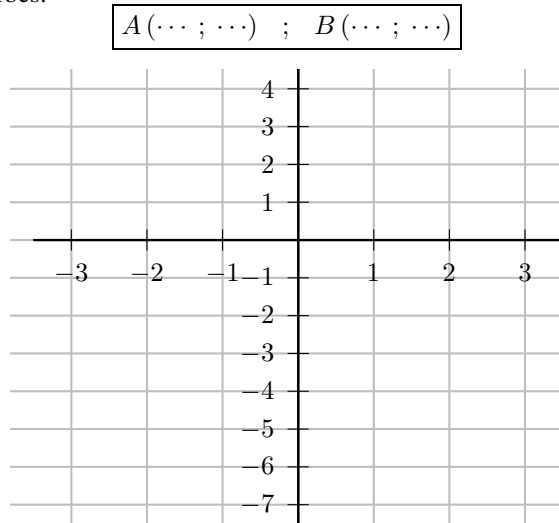
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \geq 0$.

Réponses :

$$2. P(x) = (x - 1)(x + 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) / 3. S =]-\infty; -2] \cup \left[-\frac{3}{2}; 1\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right).$$

Exercice 7. Coordonnées des points d'intersection de deux courbes

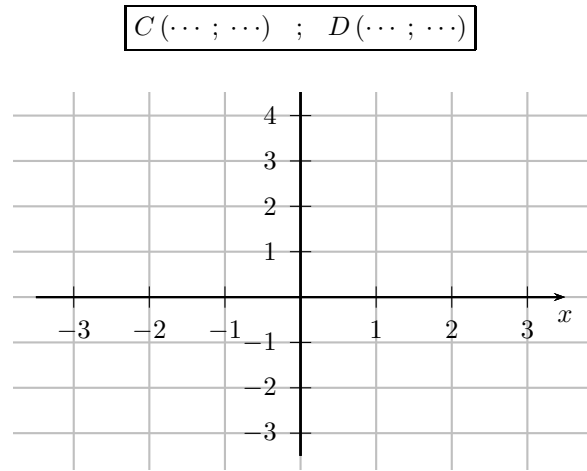
1. Sur le graphique suivant, construire la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto f(x) = (x-2)(-x-2)$ puis celle de la fonction affine $g : x \mapsto g(x) = x - 1$. Donner par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.



Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation :

$$(x-2)(-x-2) = x-1$$

2. Sur le graphique suivant, construire la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto h(x) = -x^2 + x + 2$ et celle de la fonction $k : x \mapsto k(x) = (x+1)^2$. Donner par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.



Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation :

$$-x^2 + x + 2 = (x+1)^2$$

$A\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right) ; B\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right) ; C(-1; 0) ; D\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$

Exercice 8. Factorisation et étude de signe

On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 + 4x - 3$.

1. Déterminer les racines de f sur \mathbb{R} .
2. En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.
3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.
4. Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant apparaître les racines éventuelles dans le tableau.

Réponses : 2. $f(x) = 2\left(x+1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(x+1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$; 4. : $S =]-\infty; -1-\frac{\sqrt{10}}{2}[\cup]-1+\frac{\sqrt{10}}{2}; +\infty[$

Exercice 9. Factorisation et étude de signe

Reprendre l'exercice précédent avec les fonctions suivantes :

1. f_1 , définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x^2 + x + 1$.
2. f_2 , définie sur \mathbb{R} par $f_2(x) = -x^2 + 4x + 1$.
3. f_3 , définie sur \mathbb{R} par $f_3(x) = -x^2 + 6x - 9$.

Réponses :

2. $f_1(x) = x^2 + x + 1$; 4. : $S_1 = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = -(x+\sqrt{5}-2)(x-\sqrt{5}-2)$; 4. : $S_2 =]2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}[$
2. $f_3(x) = -(x-3)^2$; 4. : $S_3 =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Exercice 10. Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

$$1. (I_1) : \frac{-2x^2 + 4x - 5}{-4x + 3} \geq 0; \quad \left| \begin{array}{l} 2. (I_2) : \frac{-x^2 + 2x - 1}{(-4x + 3)^2} \geq 0; \\ 3. (I_3) : 6x^2 < x + 1; \end{array} \right.$$

Réponses :

$$\mathcal{S}_1 = \left[\frac{3}{4}; +\infty \right[; \mathcal{S}_2 = \{1\}; \mathcal{S}_3 = \left] -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right[$$

Exercice 11. Inéquation et interprétation graphique

Reprendre les résultats de l'exercice 7 pour résoudre graphiquement puis par le calcul les deux inéquations :

$$f(x) \geq g(x) \text{ et } h(x) \geq k(x)$$

$$\text{Réponses : } S_1 = \left[\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \right] \text{ et } S_2 = \left[-1; -\frac{1}{2} \right]$$

Exercice 12. Problème

Une entreprise textile fabrique et vend en gros des chemises. Le coût de fabrication, en euros, de q chemise, est donnée par l'expression :

$$C(q) = 0,1q^2 + 4q + 1\,000$$

- Pour quels nombres de chemises fabriquées le coût est-il inférieur à 2 000 €.
- Chaque chemise est vendue 29 €. Exprimer en fonction de q le bénéfice $B(q)$ réalisé, en justifiant.
- On admet par la suite que $B(q) = -0,1q^2 + 25q - 1\,000$. Pour quels nombres de chemises vendues le bénéfice est-il positif ou nul ?
- Représenter graphiquement la fonction $B : q \mapsto B(q)$.
- Pour quel nombre de chemises réalise-t-on le bénéfice maximal et quel est alors ce bénéfice ?

Réponses : 1. Pour une production strictement inférieure à 82 chemise / 3. Pour une production comprise entre 50 et 200 chemises / 5. Le bénéfice est maximale en fabriquant 125 chemises, il est alors de 562,50 euros

Exercice 13. Coût et chiffre d'affaire : DM

Une unité de production est sous-traitante pour une grande marque de jouets. Elle fabrique des poupées et vend toute sa production. Le coût total de fabrication de q milliers de poupées, exprimé en milliers d'euros (k€), est données par :

$$C(q) = 0,05q^2 + q + 80 \text{ pour } q \in [0; 100]$$

- Étude de C .
 - Étudier le sens de variation du coût total.
 - Résoudre l'équation $C(q) = 480$. En donner une interprétation concrète.
- Le chiffre d'affaire R obtenu par la vente des q milliers de poupées produites est tel que :

$$R(50) = 300 \text{ et } R(60) = 360$$

C'est-à-dire que 60 milliers de poupées apportent 360 k€ de recette. sachant que le chiffre d'affaires est une fonction affine de la quantité, déterminer cette fonction affine R .

- On considère la fonction B définie sur $[0; 100]$ par :

$$B(q) = -0,05q^2 + 5q - 80$$

- Établir que la fonction B est la fonction de bénéfice de cette usine pour la production (et vente) de q milliers de poupées, exprimée en k€.
- Déterminer le sens de variations de B . en déduire le nombre de poupées à produire pour que le bénéfice soit maximal. Donner la valeur de ce bénéfice maximal.
- Déterminer la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (c'est-à-dire telle que $B(q)$ soit supérieur à zéro).