


1 Fonctions polynômes de degré 2

1.1 Définitions


 **Définition 1.1**
Une **fonction du second degré** ou **polynôme du second degré** est une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{où } a, b, c \text{ sont des réels fixés avec } a \neq 0.$$

Un polynôme du second degré est aussi appelé un **trinôme**.

Exemples


- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ est un trinôme avec $a = 3$; $b = 2$ et $c = -1$.
- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3x^2 + 9$ est un trinôme avec $a = -3$; $b = 0$ et $c = 9$.
- La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2x - 7$ n'est pas un trinôme mais une fonction affine.

 **Définition 1.2**
L'écriture $f(x) = ax^2 + bx + c$ est la **forme développée réduite** de f .

1.2 Forme canonique

Exemple Soit f le trinôme définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -5x^2 + 20x - 14$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -5x^2 + 20x - 14 \\ f(x) &= -5(x^2 - 4x + 2,8) \\ f(x) &= -5(x^2 - 4x + 4 - 4 + 2,8) && \text{car } x^2 - 4x \text{ est le début du développement } (x - 2)^2 \\ f(x) &= -5[(x - 2)^2 - 4 + 2,8] && \text{et } (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \\ f(x) &= -5[(x - 2)^2 - 1,2] \\ f(x) &= -5(x - 2)^2 + 6 \end{aligned}$$

 **Théorème - Définition 1.3**
Pour tout trinôme f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β uniques tels que :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

Cette forme est la **forme canonique** de f .

Preuve. Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

$$f(x) = a \left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right]$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right]$$

$$f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

$$f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

□

1.3 Représentation graphique et sens de variation des fonctions polynômes de degré 2

Dans tout ce paragraphe, f désigne une fonction trinôme définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Propriété 1.4

- (1) La représentation graphique d'une fonction du second degré est une **parabole**.
- (2) Le sommet de la parabole est le point d'abscisse α .
La droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le sommet est un axe de symétrie de la parabole.

Une étude de la forme canonique d'un polynôme du second degré permet d'obtenir ses variations.

Exemple Reprenons le trinôme f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -5x^2 + 20x - 14 = -5(x - 2)^2 + 6$.

- Pour tout réel x , $f(x) \leq 6$ car $-5(x - 2)^2$ est négatif.
De plus, $f(2) = 6$ donc pour tout réel x , $f(x) \leq f(2)$.
Ainsi, f admet un maximum en 2 et ce maximum vaut 6.
- Pour tous réels x_1 et x_2 de l'intervalle $]-\infty ; 2]$ tels que :

$$x_1 < x_2 \leq 2, \text{ on a : } x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0.$$

Or la fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 2]$ donc $(x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2$.

Comme $-5 < 0$, on obtient $-5(x_1 - 2)^2 < -5(x_2 - 2)^2$ d'où $-5(x_1 - 2)^2 + 6 < -5(x_2 - 2)^2 + 6$.

Enfin, $f(x_1) < f(x_2)$ et par suite, f est croissante sur $]-\infty ; 2]$.

- Pour tous réels x_1 et x_2 de l'intervalle $[2 ; +\infty[$ tels que :

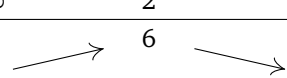
$$2 \leq x_1 < x_2, \text{ on a : } 0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2.$$

Or la fonction carré est croissante sur $[2 ; +\infty[$ donc $(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2$.

Comme $-5 < 0$, on obtient $-5(x_1 - 2)^2 > -5(x_2 - 2)^2$ d'où $-5(x_1 - 2)^2 + 6 > -5(x_2 - 2)^2 + 6$.

Enfin, $f(x_1) > f(x_2)$ et par suite, f est décroissante sur $[2 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		6	



Théorème 1.5

Les variations d'un trinôme dépendent du signe du coefficient de x^2 .

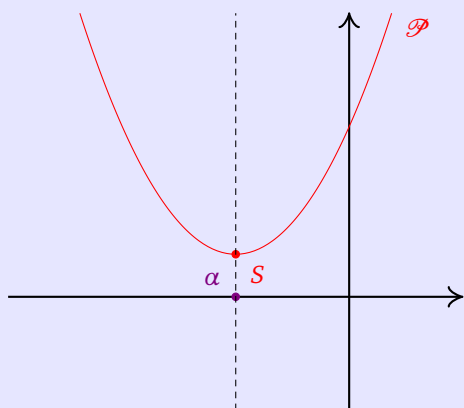
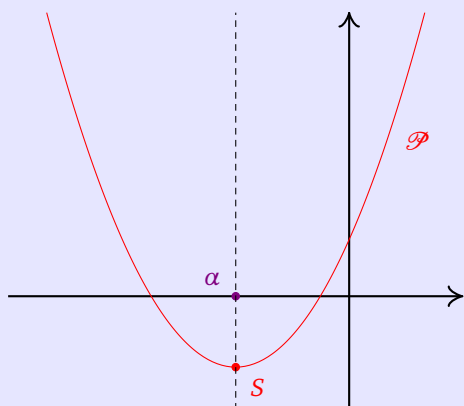
Dans le cas où $a > 0$:

f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$;

f est croissante sur $[\alpha ; +\infty[$;

f admet un minimum en α et ce minimum vaut $m = f(\alpha)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			



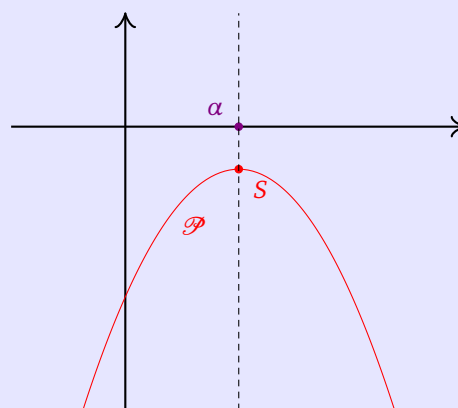
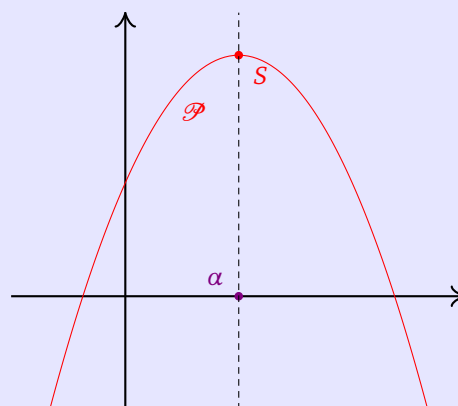
Dans le cas où $a < 0$:

f est croissante sur $]-\infty ; \alpha]$;

f est décroissante sur $[\alpha ; +\infty[$;

f admet un maximum en α et ce maximum vaut $M = f(\alpha)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$			



Preuve. Pour déterminer les variations d'un trinôme, on utilise la forme canonique.

- Pour tous réels x_1 et x_2 de l'intervalle $]-\infty ; \alpha]$ tels que :

$$x_1 < x_2 \leq \alpha, \text{ on a : } x_1 - \alpha < x_2 - \alpha \leq 0.$$

Or la fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ donc $(x_1 - \alpha)^2 < (x_2 - \alpha)^2$.

★ Si $a < 0$ alors $a(x_1 - \alpha)^2 > a(x_2 - \alpha)^2$ d'où $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta > a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$.

Enfinement, $f(x_1) > f(x_2)$ et par suite, f est décroissante sur $]-\infty ; \alpha]$.

★ Si $a > 0$ alors $a(x_1 - \alpha)^2 < a(x_2 - \alpha)^2$ d'où $a(x_1 - \alpha)^2 + \beta < a(x_2 - \alpha)^2 + \beta$.

Enfinement, $f(x_1) < f(x_2)$ et par suite, f est croissante sur $]-\infty ; \alpha]$.

- Un raisonnement analogue permet d'étudier le sens de variation sur l'intervalle $[\alpha ; +\infty[$.

□

2 Équation du second degré

2.1 Racine et discriminant d'un trinôme

Définition 2.1

On appelle :

- **équation du second degré** toute équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont des réels avec } a \neq 0.$$

- **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$, tout réel solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$;
- **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, noté Δ , le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemple L'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ est une équation du second degré son discriminant est :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 1 + 48 = 49.$$

Remarque. Le signe de Δ permet de discriminer les équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ qui ont zéro, une ou deux solutions, c'est la raison pour laquelle on l'appelle le discriminant.

Discriminer. *v. tr.* Faire la discrimination, c'est-à-dire l'action de distinguer l'un de l'autre deux objets, ici des équations.

2.2 Résolution de l'équation

Théorème 2.2

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme n'a pas de racine réelle, c'est-à-dire que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme a une unique racine : $x_0 = -\frac{b}{2a}$, c'est-à-dire que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution : x_0 .
- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme a deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, c'est-à-dire que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions : x_1 et x_2 .

Preuve. On a vu que tout trinôme $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous forme canonique, donc

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \\ &\iff a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \\ &\iff_{a \neq 0} \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \end{aligned}$$

- Si $\Delta < 0$, alors $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ n'admet aucune solution car un carré n'est jamais négatif.
- Si $\Delta = 0$, alors $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ devient $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$.

Cette égalité est vraie si, et seulement si, $x + \frac{b}{2a} = 0$ c'est-à-dire $x = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ peut s'écrire $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$.

Après factorisation on obtient :

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \iff \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs au moins est nul.

$$\begin{array}{l} x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{OU} \quad x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \\ x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{OU} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}$$

D'où les deux solutions. □

Exemples

- On a vu dans l'exemple précédent que l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$ a pour discriminant $\Delta = 49$. $\Delta > 0$, donc l'équation admet deux solutions :

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \times 2} \quad \text{ET} \quad x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \times 2} \\ x_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{ET} \quad x_2 = 2 \end{array}$$

- L'équation $x^2 - x + 4 = 0$ a un discriminant égal à $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -15$. $\Delta < 0$, donc l'équation $x^2 - x + 4 = 0$ n'admet aucune solution réelle.
- L'équation $-9x^2 + 30x - 25 = 0$ a un discriminant égal à $\Delta = 30^2 - 4 \times (-9) \times (-25) = 0$. $\Delta = 0$, donc l'équation $-9x^2 + 30x - 25 = 0$ admet une unique solution :

$$x_0 = -\frac{30}{2 \times (-9)} = \frac{5}{3}.$$

2.3 Forme factorisée

La démonstration précédente permet d'établir le résultat suivant :

Théorème 2.3

Soit $ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors le trinôme ne se factorise pas dans \mathbb{R} .
- Si $\Delta = 0$, alors le trinôme se factorise en $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$, alors le trinôme se factorise en $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Exemples D'après l'exemple précédent,

- $2x^2 - x - 6 = 2\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x - 2) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 2)$.
- $x^2 - x + 4 = 0$ n'est pas factorisable.
- $-9x^2 + 30x - 25 = -9\left(x - \frac{5}{3}\right)^2$.

3 Signe du trinôme

La factorisation d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, lorsqu'elle existe, permet de déterminer le signe du trinôme et d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 3.1

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta < 0$, alors

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	signe de a		

- Si $\Delta = 0$, alors

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta > 0$, alors, en supposant $x_1 < x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Preuve. • Si $\Delta < 0$, on a vu que $f(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$.

Il est clair que $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le même que celui de a .

- Si $\Delta = 0$, on peut établir le signe de $f(x)$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
a	signe de a		signe de a
$(x - x_0)^2$	+	0	+
$f(x)$	signe de a	0	signe de a

- Si $\Delta > 0$, alors, en supposant $x_1 < x_2$, on peut établir le signe de $f(x)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
a	signe de a		signe de a	signe de a	
$x - x_1$	-	0	+	+	
$x - x_2$	-	-	0	+	
$f(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

□

Exemples D'après l'exemple précédent,

- Signe de $f(x) = 2x^2 - x - 6$; $2 > 0$ on obtient donc :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	2	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

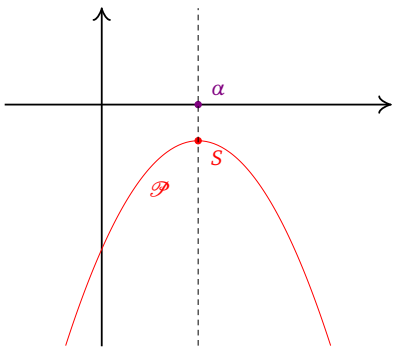
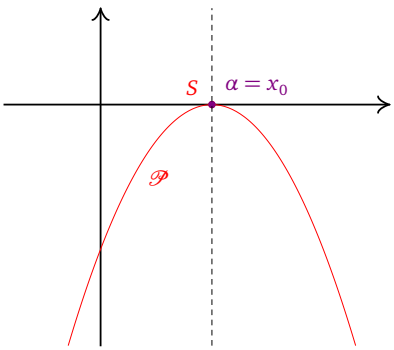
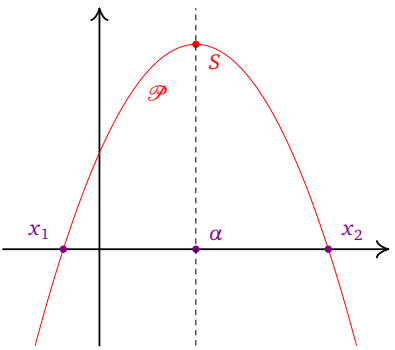
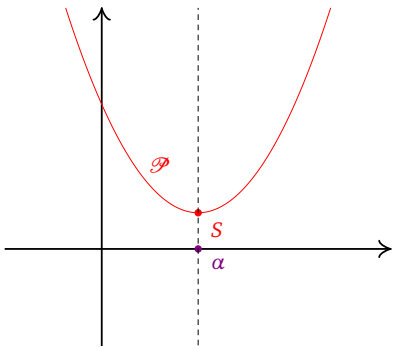
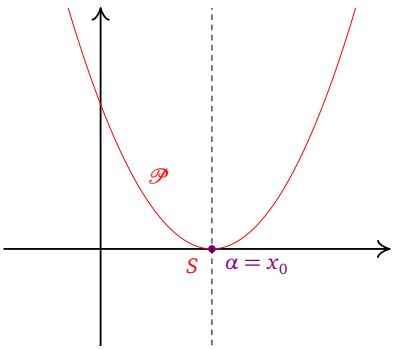
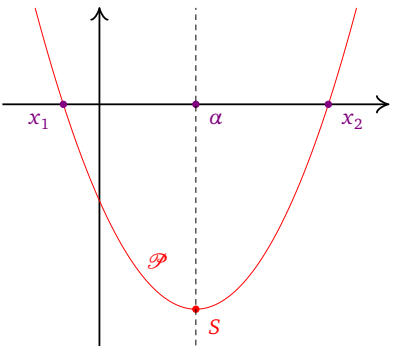
- Signe de $g(x) = x^2 - x + 4$; $1 > 0$, on obtient donc que pour tout réel x , $g(x) > 0$.
- Signe de $h(x) = -9x^2 + 30x - 25$; $-9 < 0$ on obtient donc :

x	$-\infty$	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

4 Bilan

Pour tout réel x , pour tous réels a, b, c avec $a \neq 0$;

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																											
$\forall a \neq 0$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet aucune solution réelle.	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$	L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$																											
	L'expression $ax^2 + bx + c$ n'est pas factorisable.	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$																											
$a < 0$	 <p>La parabole \mathcal{P} ne coupe pas l'axe des abscisses.</p>	 <p>La parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0.</p>	 <p>La parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses x_1 et x_2.</p>																											
	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td></td><td style="text-align: center;">β</td><td></td></tr> </table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$f(x)$		β		<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">-</td></tr> </table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	-	0	-	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">+</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">-</td></tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	-	0	+	0	-
x	$-\infty$	α	$+\infty$																											
$f(x)$		β																												
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																											
$f(x)$	-	0	-																											
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																										
$f(x)$	-	0	+	0	-																									
$a > 0$	 <p>La parabole \mathcal{P} ne coupe pas l'axe des abscisses.</p>	 <p>La parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0.</p>	 <p>La parabole \mathcal{P} coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses x_1 et x_2.</p>																											
	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td></td><td style="text-align: center;">β</td><td></td></tr> </table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$f(x)$		β		<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td style="text-align: center;">+</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">+</td></tr> </table>	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$	$f(x)$	+	0	+	<table border="1" style="margin: auto;"> <tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr><td>$f(x)$</td><td style="text-align: center;">+</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">-</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">+</td></tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$f(x)$	+	0	-	0	+
x	$-\infty$	α	$+\infty$																											
$f(x)$		β																												
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$																											
$f(x)$	+	0	+																											
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																										
$f(x)$	+	0	-	0	+																									