



Math93.com

Devoir Surveillé n°2. Correction

Première ES

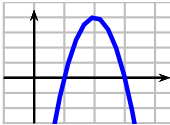
Second degré

Durée 2 heures - Coeff. 8

Noté sur 40 points

Exercice 1. QCM

4 points

		Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
1.	On sait que $\Delta < 0$ et $a < 0$; alors la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour allure				
2.	L'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'équation $x^2 + 5 = 5$ est		{0}		
3.	Le sommet S de la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 3$			(-1; 2)	
4.	L'ensemble \mathcal{S} des solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 3 < 0$] -1 ; 3[

Exercice 2. Étude complète

12 points

On considère la fonction f , définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

1. [1.5 point] Déterminer les racines de f sur \mathbb{R} .

La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 1$; $c = 2$. Le discriminant $\Delta = 9 > 0$ donc elle admet deux racines réelles.

$$\Delta = 9 > 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{S} = \{-1 ; 2\}}$$

2. [0.5 point] En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.

$$\boxed{f(x) = -(x+1)(x-2)}$$

3. [1 point] Dresser le tableau de signe de $f(x)$.

$\Delta = 9 > 0$ et $a = -1 < 0$, donc le signe de $f(x)$ est donnée par :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
signe de $f(x)$	-	0	+	0

4. [1 point] Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.

L'étude de signe de la question précédente nous donne directement la résolution de l'inéquation :

$$\boxed{f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-1 ; 2[}$$

5. [1 point] Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant apparaître les racines éventuelles dans le tableau. La fonction f est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 1$; $c = 2$. Le coefficient $a = -1 < 0$ étant négatif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées :

$$S\left(\alpha = \frac{-b}{2a} ; f(\alpha)\right) ; \boxed{S\left(\frac{1}{2} ; \frac{9}{4}\right)}$$

x	$-\infty$	-1	$\alpha = \frac{1}{2}$	2	$+\infty$
f	$-\infty$	0	$\frac{9}{4}$	0	$-\infty$

6. [1 point] Construire \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe (on fera apparaître clairement le sommet et les racines).

7. [3 points] On considère la fonction g , définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = x^2 + 3x - 10$. Étudier la fonction g (variations, racines et tableau de variations) puis construire sur le même graphique de l'annexe, \mathcal{C}_g , la courbe représentative de la fonction g (on fera apparaître clairement le sommet et les racines).

- La fonction g est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -10 \end{cases} \implies \begin{cases} \Delta = 49 > 0 \\ \alpha = \frac{-3}{2} \\ \beta = -12,25 \end{cases}$$

- Le coefficient $a = 1 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées :

$$S'\left(\alpha = \frac{-b}{2a} ; g(\alpha)\right) ; \boxed{S'\left(\frac{-3}{2} ; -12,25\right)}$$

- Les racines de g sont les solutions de l'équation $g(x) = 0$.

$$\Delta = 49 > 0 \implies \boxed{\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 2 \end{cases}}$$

- On obtient donc le tableau de variations (avec les racines) :

x	$-\infty$	-5	$\alpha = -1,5$	2	$+\infty$
Variations de g	$+\infty$	0	$-12,25$	0	$+\infty$

8. [3 points] Résoudre graphiquement, puis par le calcul l'inéquation : $f(x) \geq g(x)$.

Les abscisses des points de \mathcal{C}_f qui sont au dessus de \mathcal{C}_g sont les solutions réelles, si elles existent, de l'inéquation :

$$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \geq x^2 + 3x - 10 \Leftrightarrow -2x^2 - 2x + 12 \geq 0$$

Or le trinôme du second degré $-2x^2 - 2x + 12$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -2$; $b = -2$; $c = 12$.

$$\Delta = 25 > 0 \Rightarrow x_1 = -3 \text{ et } x_2 = 2$$

Le signe du trinôme est alors donnée par :

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
signe de $-2x^2 - x + 5$		$-$	$+$	$-$

$$\boxed{f(x) \geq g(x) \iff x \in [-3 ; 2]}$$

Exercice 3. Équation bicarrée et inéquation**6 points**

1. [2 points] Étudier sur l'intervalle $[0; 10]$ le signe de l'expression : $P(x) = x^2 - 4x - 5$

La fonction P définie sur $[0; 10]$ est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases} \implies \Delta = 36 > 0 \implies \begin{cases} x_1 = -1 \notin [0; 10] \\ x_2 = 5 \in [0; 10] \end{cases}$$

Le signe de P est donc de celui de $a = 1 > 0$ soit positif à l'extérieur des racines et négatif entre. De ce fait sur $[0; 10]$ on obtient :

x	0	5	10
signe de $x^2 - 4x - 5$	-	0	+

Donc $P(x)$ est négatif sur $[0; 5]$ et positif sur $[5; 10]$.

2. [4 points] En posant $X = x^2$, résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $(E_2) : x^4 - x^2 - 2 = 0$.

$$(E_2) : x^4 - x^2 - 2 = 0 \iff x \in \mathcal{S} = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

Exercice 4. A la recherche du taux**5 points**

Un capital de 10 000 euros est placé à un taux de $t\%$ puis l'année suivante au taux de $(t+2)\%$. Au bout de deux ans, le capital obtenu est de 11 235 euros.

1. [3 points] Expliquez pourquoi t est solution de l'équation : $t^2 + 202t - 1035 = 0$.

Le coefficient multiplicateur k associé à ces deux évolutions successives est :

$$k = \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t+2}{100}\right)$$

On obtient donc l'égalité :

$$\begin{aligned} 10000 \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) \times \left(1 + \frac{t+2}{100}\right) &= 11235 \iff \left(\frac{100+t}{100}\right) \times \left(\frac{t+102}{100}\right) = \frac{11235}{10000} \\ &\iff \frac{(100+t) \times (t+102)}{10000} = \frac{11235}{10000} \\ &\iff (100+t) \times (t+102) = 11235 \\ &\iff 100t + 10200 + t^2 + 102t = 11235 \\ &\iff \underline{t^2 + 202t - 1035 = 0} \end{aligned}$$

2. [2 points] Calculer le taux t .

L'équation $t^2 + 202t - 1035 = 0$ est une équation du second degré de la forme $at^2 + bt + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 202 \\ c = -1035 \end{cases} \implies \Delta = 44944 > 0 \implies \begin{cases} x_1 = -207 < 0 \\ x_2 = 5 > 0 \end{cases}$$

Le taux du placement étant positif, la seule solution est donc $\underline{t\% = 5\%}$.

Exercice 5. Optimisation de bénéfice**13 points**

Une entreprise fabrique chaque jour x milliers d'objets avec $x \in [0; 60]$. Le coût total de production de ces objets, exprimé en milliers d'euros, est donné par : $C(x) = x^2 - 30x + 300$.

1. [2,5 points] Étudier les variations de C sur $[0; 60]$ et dresser le tableau de variation (avec les images aux bornes).

La fonction C est une fonction polynôme du second degré avec : $a = 1$; $b = -30$; $c = 300$. Le coefficient $a = 1 > 0$ étant positif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un minimum, de coordonnées :

$$S\left(\alpha = \frac{-b}{2a} ; C(\alpha)\right) ; \boxed{S(15; 75)}$$

x	0	$\alpha = 15$	60
Variation de C	$C(0) = 300$	$C(15) = 75$	$C(60) = 2100$

2. [0,5 point] Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 10 euros. Calculer la recette $R(x)$ (en milliers d'euros).

La recette exprimée aussi en milliers d'euros est $\boxed{R(x) = 10x}$.

3. [1 point] Justifier que le bénéfice, exprimé aussi en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers d'objets est donné, pour $x \in [0; 60]$, par : $B(x) = -x^2 + 40x - 300$.

Le bénéfice réalisé pour la production et la vente de x objets est donné, pour $x \in [0; 60]$, en faisant la différence des recettes et des coûts soit :

$$\boxed{B(x) = 10x - (x^2 - 30x + 300) = -x^2 + 40x - 300}$$

4. [2,5 points] Étudier les variations de B sur $[0; 60]$ et dresser le tableau de variation (avec les images aux bornes).

La fonction B est une fonction polynôme du second degré avec : $a = -1$; $b = 40$; $c = -300$. Le coefficient $a = -1 < 0$ étant négatif, sa courbe représentative est une parabole de sommet un maximum, de coordonnées :

$$S'\left(\alpha = \frac{-b}{2a} ; B(\alpha)\right) ; \boxed{S'(20; 100)}$$

x	0	10	$\alpha = 20$	30	60
Variation de B	-300	0	100	0	-1500

5. [1 point] En déduire la quantité permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice max. ?

la fonction bénéfice B atteint donc un maximum de 100, atteint pour $x = 20$.

De ce fait, le bénéfice maximal est donc de 100 000 euros, obtenu pour une production de 20 000 objets.

6. [3 points] Inéquation et interprétation.**6. a. Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$.**

$$B(x) \geq 0 \iff -x^2 + 40x - 300 \geq 0$$

Or le trinôme du second degré $-x^2 + 40x - 300$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$; $b = 40$; $c = -300$.

$$\Delta = 400 > 0 \implies x_1 = 10 \text{ et } x_2 = 30$$

Le signe du trinôme est alors donnée par :

x	0	10	30	60	
signe de $-x^2 + 40x - 300$	-	0	+	0	-

$$\boxed{g(x) \geq 0 \iff x \in [10; 30]}$$

6. b. **Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.**

L'entreprise est rentable quand son bénéfice est positif, elle doit donc vendre entre **10 000 et 30 000 objets** pour que la production soit rentable.

7. [1,5 points] **Sur le deuxième graphique de l'annexe, on a tracé \mathcal{C}_C , la courbe représentative de la fonction C . Construire \mathcal{C}_R , la courbe représentative de la fonction recette R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.**

Graphiquement, il suffit de regarder les valeurs de x pour lesquels la droite des recettes est au-dessus de celle des coûts.

8. [1 point] **Retrouver graphiquement le bénéfice maximal. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.**

Ce bénéfice maximal correspond à l'écart maximal entre la droite et la courbe des coûts \mathcal{C}_f entre 10 et 30.

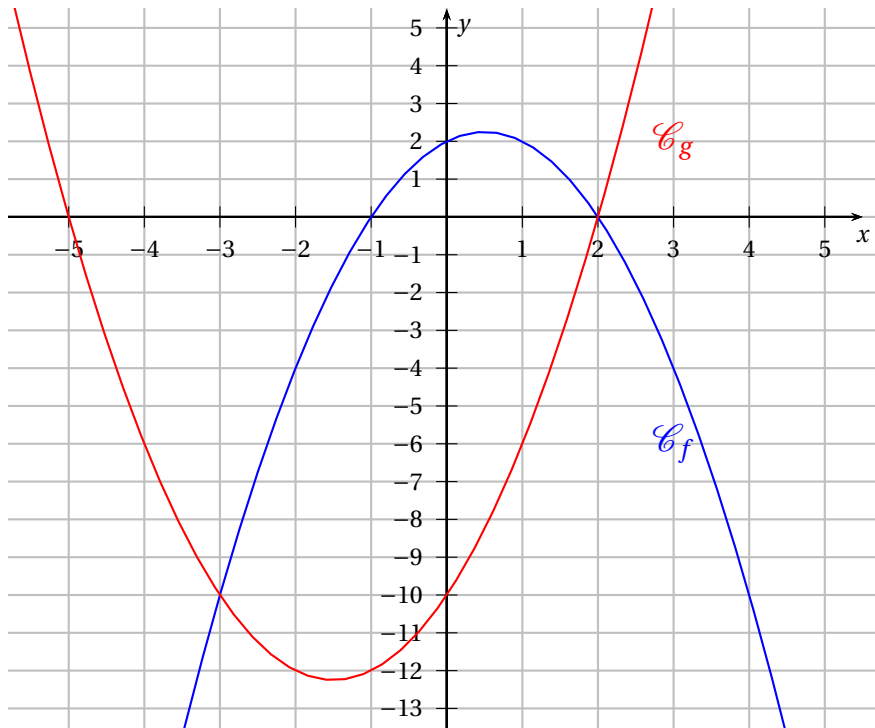
∞ Fin du devoir ∞

Bonus

$$(x+3)^4 - 3(x+3)^2 + 2 = 0 \iff x \in \{-\sqrt{2}-3; -4; -2; \sqrt{2}-3\}$$

Annexe à rendre avec votre copie

Graphique de l'exercice 2



Graphique de l'exercice 5

