Math93.com

Devoir Surveillé n°2.

Première ES

Second degré

Durée 2 heures - Coeff. 8

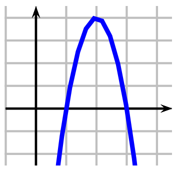
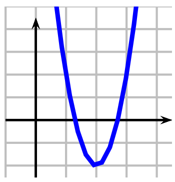
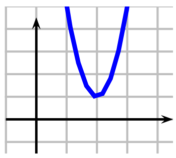
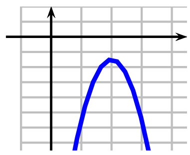
Noté sur 40 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. QCM — 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Une réponse correcte rapporte 1 point. L'absence de réponse ou une réponse fausse ne retire aucun point. Aucune justification n'est demandée.

Recopier sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie.

		Réponse a	Réponse b	Réponse c	Réponse d
1.	On sait que $\Delta < 0$ et $a < 0$; alors la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ a pour allure				
2.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $x^2 + 5 = 5$ est	$\{-5 ; 5\}$	$\{0\}$	$\varnothing$	$\{-\sqrt{5} ; \sqrt{5}\}$
3.	Le sommet S de la parabole d'équation $y = x^2 + 2x + 3$ est	$(1 ; 2)$	$(2 ; 1)$	$(-1 ; 2)$	$(1 ; -2)$
4.	L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'inéquation $x^2 - 2x - 3 < 0$ est	$]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$	$\varnothing$	$]-\infty ; -3[\cup]1 ; +\infty[$	$]-1 ; 3[$

Exercice 2. Étude complète — 12 points

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

1. **[1 point]** Déterminer les racines de f sur $\mathbb{R}$.
2. **[1 point]** En déduire l'expression factorisée de f si cela est possible.
3. **[1 point]** Dresser le tableau de signe de $f(x)$.
4. **[1 point]** Résoudre l'inéquation $f(x) > 0$.
5. **[1 point]** Dresser le tableau de variation de la fonction f en faisant apparaitre les racines éventuelles dans le tableau.
6. **[1 point]** Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f dans le repère de l'annexe (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).
7. **[4 points]** On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 + 3x - 10$$

Étudier la fonction g (variations, racines et tableau de variations) puis construire sur le même graphique de l'annexe, $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g (on fera apparaitre clairement le sommet et les racines).

8. **[3 points]** Résoudre graphiquement, puis par le calcul l'inéquation :

$$f(x) \geq g(x)$$

Exercice 3. Équation bicarrée et inéquation — 6 points

1. **[3 points]** Étudier sur l'intervalle $[0;10]$ le signe de l'expression :

$$P(x) = x^2 - 4x - 5$$

2. **[3 points]** En posant $X = x^2$, résoudre dans $\mathbb{R}$

$$(E_2) \ : \ x^4 - x^2 - 2 = 0$$

Exercice 4. A la recherche du taux — 5 points

Un capital de 10 000 euros est placé à un taux de t% puis l'année suivante au taux de $(t+2)$%. Au bout de deux ans, le capital obtenu est de 11 235 euros.

1. **[3 points]** Expliquez pourquoi t est solution de l'équation :

$$t^2 + 202t - 1\,035 = 0$$

2. **[2 points]** Calculer le taux t.

Exercice 5. Optimisation de bénéfice — 13 points

Une entreprise fabrique chaque jour x milliers d'objets avec $x \in [0;60]$. Le coût total de production de ces objets, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x) = x^2 - 30x + 300$$

1. **[2 points]** Étudier les variations de C sur $[0;60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer les images aux bornes.

2. **[0,5 point]** Chaque objet fabriqué est vendu au prix unitaire de 10 euros. Calculer, en fonction de x, la recette $R(x)$ exprimée aussi en milliers d'euros.

3. **[1 point]** Justifier que le bénéfice, exprimé aussi en milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x milliers d'objets est donné , pour $x \in [0;60]$, par :

$$B(x) = -x^2 + 40x - 300$$

4. **[3 points]** Étudier les variations de B sur $[0;60]$ et dresser le tableau de variation en faisant figurer les images aux bornes.

5. **[1 point]** En déduire la quantité à produire permettant à l'entreprise de réaliser un bénéfice maximal. Quel est ce bénéfice maximal ?

6. **[3 points]** Inéquation et interprétation.

6. a. Résoudre l'inéquation $B(x) \geq 0$.

6. b. Déduire de la question précédente les quantités que l'entreprise doit produire et vendre pour que la production soit rentable.

7. **[1,5 points]** Sur le deuxième graphique de l'annexe, on a tracé $\mathscr{C}_C$, la courbe représentative de la fonction C.
Construire $\mathscr{C}_R$, la courbe représentative de la fonction recette R et expliquer comment graphiquement retrouver le résultat de la question précédente.

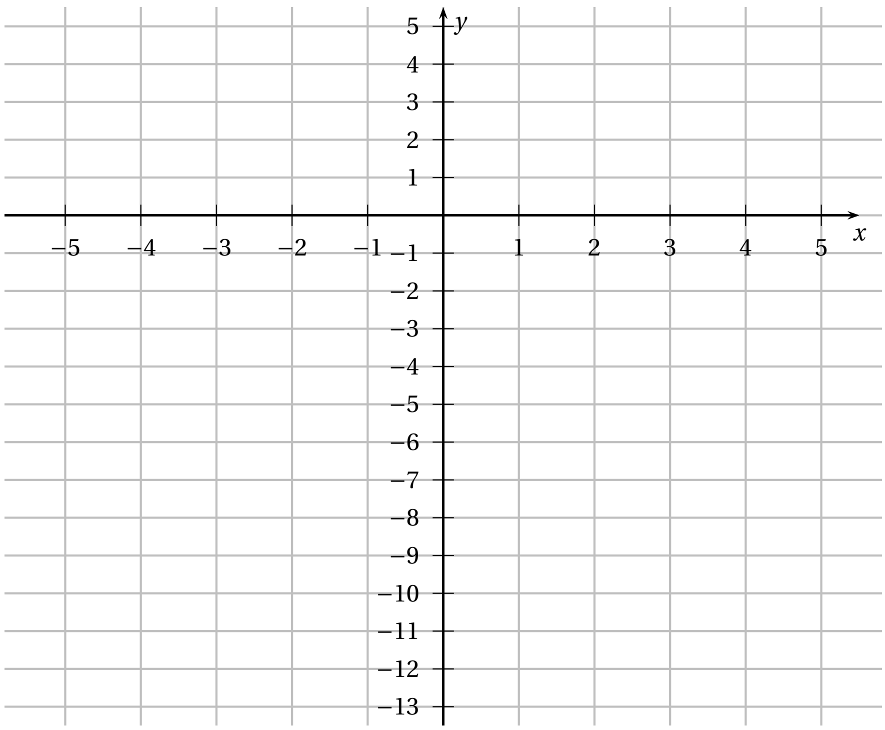
8. **[1 point]** Retrouver graphiquement le bénéfice maximal. Expliquez votre raisonnement et visualisez ce bénéfice maximal sur le graphique à l'aide de couleur.

Fin du devoir

Bonus
Résoudre l'équation : $(x+3)^4 - 3(x+3)^2 + 2 = 0$.

Annexe à rendre avec votre copie

Graphique de l'exercice 2



Graphique de l'exercice 5