



Math93.com

Devoir Surveillé n°5

Correction

Première ES/L
Probabilités
 Durée 1 heure - Coeff. 5
 Noté sur 20 points

Exercice 1.

7 points

Une urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

Soit le jeu suivant :

- on gagne 10 euros si la face sortie est 1 ou un 2 ; et 5 euros si c'est un 3 ; on perd 90 euro si c'est un 4.

1. [1 point] Décrire l'univers et l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X .

On définit alors la variable aléatoire X sur Ω qui correspond au gain (ou perte). La v.a. X associe :

- 10 à l'issue ou évènement élémentaire {1} ;
- 10 à l'issue ou évènement élémentaire {2} ;
- 5 à l'issue ou évènement élémentaire {3} ;
- et -90 à l'issue ou évènement élémentaire {4} .

L'ensemble des valeurs prises par X est donc $F = \{-50 ; 5 ; 10\}$ alors que l'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. L'univers associé est alors

$$\Omega = \{e_1 = 1 ; e_2 = 2 ; e_3 = 3 ; e_4 = 4\}$$

2. [1.5 point] Décrire par une phrase l'évènement « $X = +5$ » et calculer sa probabilité.

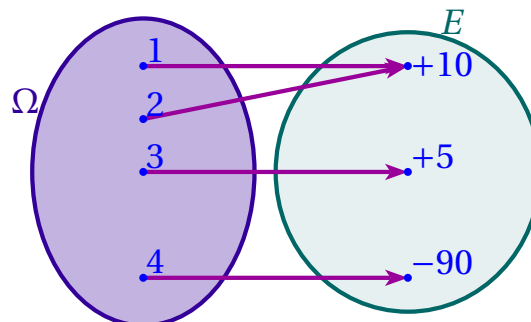
- L'évènement « $X = +5$ » est l'évènement : « le joueur a gagné 5 euro », il correspond donc à l'évènement élémentaire {3}.
- Par ailleurs il y a 3 boules qui portent le n° 3 sur un total de 8 boules. On considérant l'équiprobabilité des tirages on a alors :

$$p(e_3) = \frac{3}{8} = 0,375$$

On a donc :

$$P(X = +5) = \underline{0,375}$$

3. [2 points] Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X .



- Il y a deux boules qui portent le n°1 sur 8, donc en supposant que chaque boule à la même chance d'être tirée on a :

$$p(e_1) = \frac{2}{8} = 0,25$$

On obtient de la même façon :

$$P(e_2) = \frac{2}{8} = 0,25 ; P(e_3) = \frac{3}{8} = 0,375 ; P(e_4) = \frac{1}{8} = 0,125$$

- La loi de probabilité des issues correspondantes est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$P(e_i)$	0,25	0,25	0,375	0,125	1

- La loi de probabilité de X est décrite par le tableau :

x_i	-90	5	10	Total
$P(X = x_i)$	$p(e_4) = 0,125$	$p(e_3) = 0,375$	$p(e_1) + p(e_2) = 0,5$	1

4. [1.5 point] Décrire par une phrase l'évènement « $X \geq +5$ » et calculer sa probabilité.

L'évènement « $X \geq +5$ » est l'évènement : « le joueur a gagné 5 euro ou plus », il correspond donc à l'évènement $\{1 ; 2 ; 3\}$. La probabilité de l'évènement « $X \geq +5$ » est celle de l'évènement $\{1 ; 2 ; 3\}$ on a donc :

$$P(X \geq +5) = 0,25 + 0,25 + 0,375 = \underline{0,875}$$

5. [1 point] Donner l'espérance de la variable aléatoire X .

Donc l'espérance est :

$$E(X) = -90 \times 0,125 + 5 \times 0,375 + 10 \times 0,5 = \underline{-4,375}$$

Cela signifie que le gain moyen au jeu est une perte de 4,375 euros. Le jeu n'est pas équitable et il est préférable de ne pas jouer.

Exercice 2.

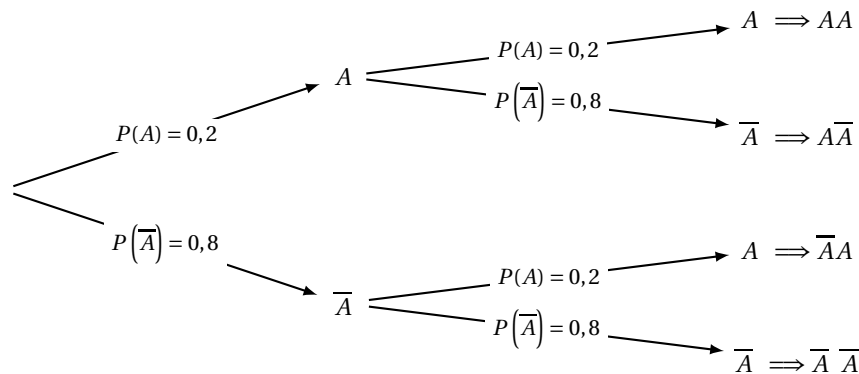
5 points

Une agence de sondage interroge des consommateurs sur l'utilisation d'un site internet. On note A l'évènement « la personne interrogée est satisfaite du site ». La probabilité $P(A)$ qu'une personne soit satisfaite du site est de 0,2. On interroge deux consommateurs de façon indépendantes.

1. [1 point] Compléter sur cette feuille l'arbre ci-dessous.

On résume les données dans un arbre pondéré.

On note par exemple AA ou $(A ; A)$ l'évènement : « la première et la deuxième personne sont satisfaites »



2. [1 point] Calculer la probabilité qu'ils soient tous deux satisfaits du site.

La probabilité qu'ils soient tous deux satisfaits du site est la probabilité de la liste (ou chemin) AA . D'après le cours, elle est égale au produit des probabilités figurant sur ses branches soit :

$$P(AA) = 0,2 \times 0,2 = \underline{0,04}$$

3. [3 points] Calculer la probabilité qu'au moins un des deux soit satisfaits du site.

- Méthode 1

La probabilité qu'au moins un des deux soit satisfaits du site est celle de l'évènement

$B = \{A\bar{A}; \bar{A}A; AA\}$. On a donc d'après le cours :

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(A\bar{A}) + P(\bar{A}A) + P(AA) \\
 &= 0,2 \times 0,8 + 0,8 \times 0,2 + 0,04 \\
 P(B) &= \underline{0,36}
 \end{aligned}$$

- Méthode 2

L'évènement contraire de l'évènement « *au moins un des deux soit satisfaits du site* » est celle de l'évènement « *aucune n'est satisfaite du site* ». On a donc d'après le cours :

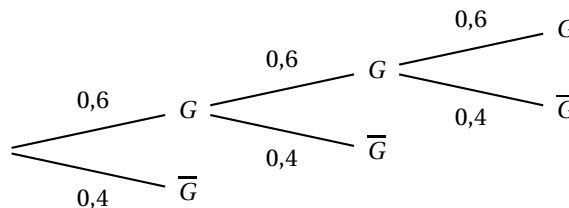
$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P(\overline{A} \overline{A}) \\ &= 1 - 0,8 \times 0,8 \\ P(B) &= \underline{0,36} \end{aligned}$$

Exercice 3. Le tournoi de tennis**5 points**

Un tournoi de tennis se déroule par élimination directe. On peut jouer au maximum trois parties (si on va en finale). À chaque rencontre, Roger a une probabilité de gagner égale à 0,6. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées par Roger.

1. [2 points] Montrer que $P(X = 2) = 0,24$.

Soit G l'évènement « Roger gagne une partie ». Quand Roger perd une partie, le tournoi s'arrête pour lui donc on a :



Puisque X est la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées par Roger, l'évènement « $X = 2$ » correspond à l'évènement $G \overline{G}$ puisque pour jouer seulement 2 parties, Roger doit gagner la première et perdre la seconde. On a donc :

$$P(X = 2) = P(G \overline{G}) = 0,6 \times 0,4 = \underline{0,24}$$

2. [2 points] Donner la loi de probabilité de X .

- La variable aléatoire X peut prendre trois valeurs, 1, 2 ou 3 car Roger joue au moins une partie (la première) et au plus 3. On a déjà calculé $P(X = 2) = P(G \overline{G}) = \underline{0,24}$, calculons $P(X = 1)$.
- L'évènement « $X = 1$ » correspond à l'évènement \overline{G} puisque pour jouer seulement 1 partie, Roger doit perdre la première. On a donc :

$$P(X = 1) = P(\overline{G}) = \underline{0,4}$$

- La somme des probabilités des évènements « $X = x_i$ » pour x_i prenant les valeurs entières de 1 à 3 faisant 1, on a alors :

$$P(X = 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) = \underline{0,36}$$

- On obtient donc :

x_i	1	2	3	Total
$P(X = x_i)$	0,4	0,24	0,36	1

3. [1 point] Calculer son espérance mathématique.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^3 x_i \times P(X = x_i) \\ &= 1 \times 0,4 + 2 \times 0,24 + 3 \times 0,36 \\ E(X) &= \underline{1,96} \end{aligned}$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est donc de 1,96. Cela correspond au nombre moyen de parties jouées par Roger.

Exercice 4. Déjà vu ...**3 points**

On considère la fonction k définie sur $[1; +\infty[$ par $k(x) = \frac{1-4x^2}{2-3x^2}$.

1. Montrer que la fonction dérivée de k sur $[1; +\infty[$ est :

$$k'(x) = \frac{-10x}{(2-3x^2)^2}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T_1 à \mathcal{C}_k au point d'abscisse 1.

On a : $T_1 : y = k'(1)(x+1) + k(1)$ soit :

$$\begin{cases} k(1) = 3 \\ k'(1) = -10 \end{cases} \Rightarrow T_1 : y = -10(x-1) + 3 \text{ soit } \boxed{T_0 : y = -10x + 13}$$

3. Déterminer les coordonnées du point de \mathcal{C}_k qui admet une tangente horizontale.

Les abscisses des points de \mathcal{C}_k qui admettent une tangente horizontale sont les éventuelles solutions de l'équation $k'(x) = 0$ soit :

$$k'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-10x}{(2-3x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow -10x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

L'unique point est donc celui d'abscisse 0 et d'ordonnée $k(0) = \frac{1}{2}$ soit :

$$\boxed{A\left(0; \frac{1}{2}\right)}$$