Math93.com

Devoir Surveillé n°8A Correction

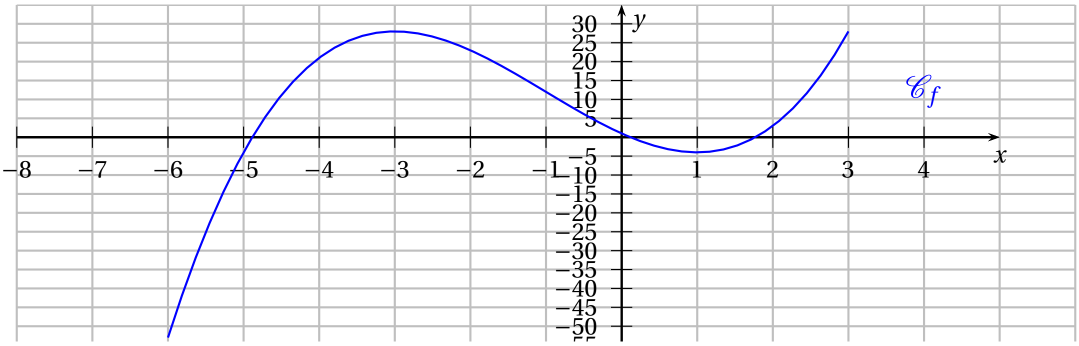
Première ES

Application de la dérivation

Durée 1 heure - Coeff. 4

Noté sur 20 points

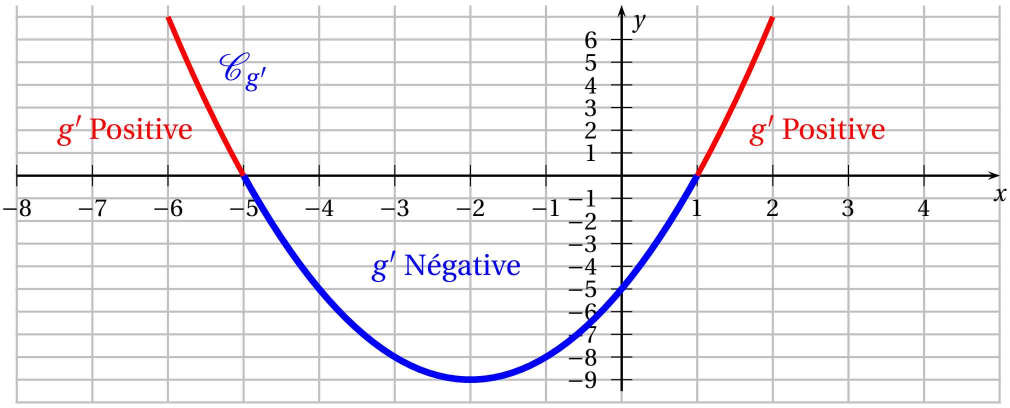
Exercice 1. Lecture graphique et calculs — 2 points



On considère la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-6\,;3]$. D'après le graphique, dresser le tableau de variation de f et le tableau de signe de la fonction dérivée f' sur $[-6\,;3]$.

x	-6		-3		1		3
Variations de f	-53	↗	28	↘	-4	↗	28
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exercice 2. Lecture graphique et calculs — 2 points



On a ci-dessus construit la courbe représentative de la fonction g', la dérivée d'une fonction g, définie et dérivable sur $[-6\,;2]$. D'après le graphique, dresser le tableau de signe de $g'(x)$ et le tableau de variation de g sur $[-6\,;2]$.

On s'intéresse au signe de la fonction dérivée g' dont on a le graphe. On remarque que g' s'annule en -5 et en 1 et est positive entre -5 et 1 et négative ailleurs.

x	-6		-5		1		2
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g		↗		↘		↗	

Exercice 3. Étude des variations 8 points

Calculer la dérivée des fonctions suivantes, étudier son signe puis dresser le tableau de variation sur l'intervalle de définition en faisant figurer les images de valeurs aux bornes.

1. **La fonction h définie sur l'intervalle $[0;10]$ par : $h(x) = x^2 - 3x + 1$.**

La fonction h est définie et dérivable sur $[0;10]$ car c'est une fonction polynôme.
Pour tout réel x de cet intervalle on a :

$$f'(x) = 2x - 3$$

Et donc

$$\text{Pour tout } x \text{ de } [0;10] : \begin{cases} 2x+3=0 \iff x = \dfrac{3}{2} \\ 2x+3>0 \iff x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

x	0		$\frac{3}{2}$		10
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h	1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗	71

2. **La fonction i définie sur l'intervalle $[0;10]$ par : $i(x) = x^3 + 3x^2 - 45x$.**

La fonction i est définie et dérivable sur $[0;10]$ car c'est une fonction polynôme.
Pour tout réel x de cet intervalle on a :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 45$$

L'expression $\left(3x^2 + 6x - 45\right)$ est une expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 6 \\ c = -45 \end{array} \right| \Longrightarrow \Delta = 576 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(3x^2 + 6x - 45\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{576}}{6} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + \sqrt{576}}{6} = 3$$

La dérivée est du signe de $a = 3$ donc positive à l'extérieur des racines et négative ailleurs. On obtient alors :

x	0		3		10
Signe de $i'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de i	0	↘	-81	↗	850

3. La fonction k définie sur l'intervalle $[0;10]$ par : $k(x)=\dfrac{2-3x}{x+1}$.

La fonction k est définie et dérivable sur son ensemble de définition (comme quotient d'une fonction définie, par une fonction définie et non nulle sur cet intervalle). Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x)=2-3x$	$u'(x)=-3$
$v(x)=x+1$	$v'(x)=1$

Pour tout réel x de $[0;10]$:

$$k(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$k(x)=\frac{-3\times(x+1)-(2-3x)\times(1)}{(x+1)^2}$$
$$k(x)=\frac{-3x-3-2+3x}{(x+1)^2}$$

$$\underline{\forall x\in[0;10]}\ ;\ \boxed{k'(x)=\frac{-5}{(x+1)^2}}$$

Puisque le dénominateur $(x+1)^2$ est strictement positif sur cet intervalle, la dérivée est du signe du numérateur, soit strictement négative. La fonction k est donc strictement décroissante sur $[0;10]$.

x	0	10
Signe de $k'(x)$	$-$	
Variations de k	2 ↘	$-\dfrac{28}{11}$

Exercice 4. Étude des variations — 8 points

On considère la fonction j définie sur l'intervalle $[0;10]$ par : $j(x)=\dfrac{x-3}{x^2+x+1}$.

1. Montrer que la dérivée de j sur l'intervalle $[0;10]$ est définie par : $j'(x)=\dfrac{-x^2+6x+4}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

La fonction j est définie et dérivable sur son ensemble de définition (comme quotient d'une fonction définie, par une fonction définie et non nulle sur cet intervalle). Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x)=x-3$	$u'(x)=1$
$v(x)=x^2+x+1$	$v'(x)=2x+1$

Pour tout réel x de $[0;10]$:

$$j(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$j(x)=\frac{1\times\left(x^2+x+1\right)-(x-3)\times(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$
$$j(x)=\frac{x^2+x+1-(2x^2+x-6x-3)}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$\underline{\forall x\in[0;10]}\ ;\ \boxed{j'(x)=\frac{-x^2+6x+4}{\left(x^2+x+1\right)^2}}$$

2. Étudier le signe de la dérivée puis dresser le tableau de variation de j sur l'intervalle $[0;10]$.

Puisque le dénominateur est strictement positif sur l'intervalle $[0;10]$, la fonction dérivée j' est du signe du numérateur.

L'expression $\left(-1x^2+6x+4\right)$ est une expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=6 \\ c=4 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 52>0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-1x^2+6x+4\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-6-\sqrt{52}}{-2}\approx 6.61 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-6+\sqrt{52}}{-2}\approx -0.61$$

La dérivée est du signe de $a=-1$ donc négative à l'extérieur des racines et positive ailleurs. On obtient alors :

x	0		x_1		10
Signe de $i'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de i	-3	$\nearrow$	$j(x_1)$	$\searrow$	$\frac{7}{111}$

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_j$ au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente (T) á la courbe $\mathscr{C}_j$ au point d'abscisse $a=0$ est $(T)\;:\; y=j'(a)(x-a)+j(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} j(0) & =-3 \\ j'(0) & =4 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll}(T)\;: & y=4\times(x-0)\;-3 \\ & \underline{y=4x-3}\end{array}$$

Fin du devoir