Math93.com

Devoir Surveillé n°9
Première ES
Application de la dérivation
Durée 2 heures - Coeff. 8
Noté sur 21 points

L'usage de la calculatrice <u>est autorisé</u>.

Exercice 1. Probabilités — 5 points

Une enquête a été réalisée auprès des élèves inscrits à la demi-pension d'un lycée. Les résultats révèlent que :

- 95 % des élèves déclarent manger régulièrement à la cantine et parmi ceux-ci 70 % sont satisfaits de la qualité des repas ;
- 20 % des élèves qui ne mangent pas régulièrement sont satisfaits de la qualité des repas.

On choisit un élève au hasard parmi les élèves inscrits à la demi-pension.
On note les évènements suivants :

- R l'évènement : « l'élève mange régulièrement à la cantine » ;
- S l'évènement : « l'élève est satisfait ».

On notera $\overline{R}$ et $\overline{S}$ les évènements contraires de R et S.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculer la probabilité que l'élève mange régulièrement à la cantine et soit satisfait de la qualité des repas.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement S est égale à $0,675$.

4. On choisit 10 élèves au hasard. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves déclarant être satisfaits de la qualité des repas. Le nombre d'élèves étant suffisamment grand, on considère que X suit une loi binomiale.

Les résultats seront arrondis au millième.

4. a. Préciser les paramètres de cette loi binomiale.

4. b. Calculer la probabilité de l'évènement A : « quatre élèves (sur les 10 choisis) sont satisfaits de la qualité des repas ».

4. c. Décrire à l'aide d'une phrase l'évènement $\overline{A}$ et calculer sa probabilité.

Exercice 2. Intervalle de fluctuation : Les clés USB — 2 points

Une entreprise produit en grande série des clés USB pour l'industrie informatique.
On prélève au hasard 200 clés dans la production de la journée pour vérification. La production est assez grande pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 200 clés.
On admet que la probabilité qu'une clé USB prélevée au hasard dans la production d'une journée soit défectueuse est égale à 0,02.
On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de clés défectueuses de ce prélèvement.
On admet que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0,2$.
Voici une partie de la table des valeurs $P(X \leq k)$:

k	$P(X \leq k$
28	0.0179
29	0.0283
30	0.043
…	…
49	0.9506
50	0.9655
51	0.9764

1. Déterminer le plus petit entier a tel que : $P(X \leq a) > 0,025$.

2. Déterminer le plus petit entier b tel que : $P(X \leq b) \geq 0,975$.

3. En déduire un intervalle de fluctuation à 95% de la fréquence f de clés USB défectueuses dans un échantillon de taille $n = 200$.

Exercice 3. Suites   5 points

Des observations ont établi qu'à la fin de l'été 2010, un glacier de haute montagne possédait un volume de 50 000 m^3. Chaque année, pendant la période hivernale, ce glacier se recharge de 10% de son volume puis perd en moyenne 6 000 m^3 pendant l'été.

On modélise la situation par la suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 = 50 \\ u_{n+1} = 1,1\ u_n - 6 \end{cases}$$

où u_n désigne le volume du glacier, en milliers de m^3, à la fin de l'été de l'année 2010 + n.

Partie A

1.

1. a. Vérifier que le volume du glacier à la fin de l'été de l'année 2011 est de 49 000 m^3.

1. b. Calculer u_2.

2. On propose l'algorithme suivant :

INITIALISATION	
	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à u la valeur 50
TRAITEMENT	
	Tant que $u \geq 40$ faire
	Affecter à u la valeur $1.1 \times u - 6$
	Affecter à n la valeur $n + 1$
	Fin Tant que
SORTIE	
	Afficher 2010 + n

2. a. Donner le résultat affiché par cet algorithme.

2. b. Que représente ce nombre dans le contexte de l'exercice ?

Partie B

1. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = u_n - 60$.

1. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

1. b. Soit n un entier naturel. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = -10 \times 1,1^n + 60$$

On admet que la suite (u_n) est strictement décroissante.

2. On considère que ce glacier aura disparu lorsque son volume sera inférieur à 10 000 m^3.
Déterminer la date que le modèle laisse prévoir pour la disparition du glacier.

Exercice 4. Une fonction — 4 points

Soit C la fonction définie pour tout x élément de l'intervalle $]0;10]$ par :

$$C(x) = 0,2x^3 - 2x^2 + 9x + 6$$

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
La courbe représentative de la fonction C, notés $\mathscr{C}_C$ est tracée sur l'annexe à rendre avec votre copie, dans un repère orthogonal.

Le prix de vente de chaque article produit est égal à 8,35€.

1. On note $R(x)$ la recette générée par la production et la vente de x milliers d'articles.

1. a. Dans le repère précédent, tracer la courbe représentative de la fonction recette.

1. b. Déterminer graphiquement la quantité x que l'entreprise doit produire pour maximiser son profit.

2. Le bénéfice est la fonction B définie sur l'intervalle $]0;10]$ par $B(x) = R(x) - C(x)$.

2. a. Montrer que pour tout réel c de l'intervalle $]0;10]$ on a :

$$B'(x) = -0,6x^2 + 4x - 0.65$$

2. b. Étudier les variations de la fonction B.

2. c. En déduire la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
Quel est le montant en euro de ce bénéfice maximal ?

Exercice 5. Une fonction — 5 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

1. Montrer que la dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(x) = \frac{4\left(x^2 - 2x - 3\right)}{\left(x^2 + 3\right)^2}$$

2. Étudier les variations de la fonction f.

3. Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.
Représenter la tangente T sur le graphique de l'annexe à rendre avec votre copie,

Fin du devoir

Bonus : 1 point
Dans l'exercice 2, donner un intervalle de fluctuation à 98% de la fréquence f de clés USB défectueuses dans un échantillon de taille $n = 200$.

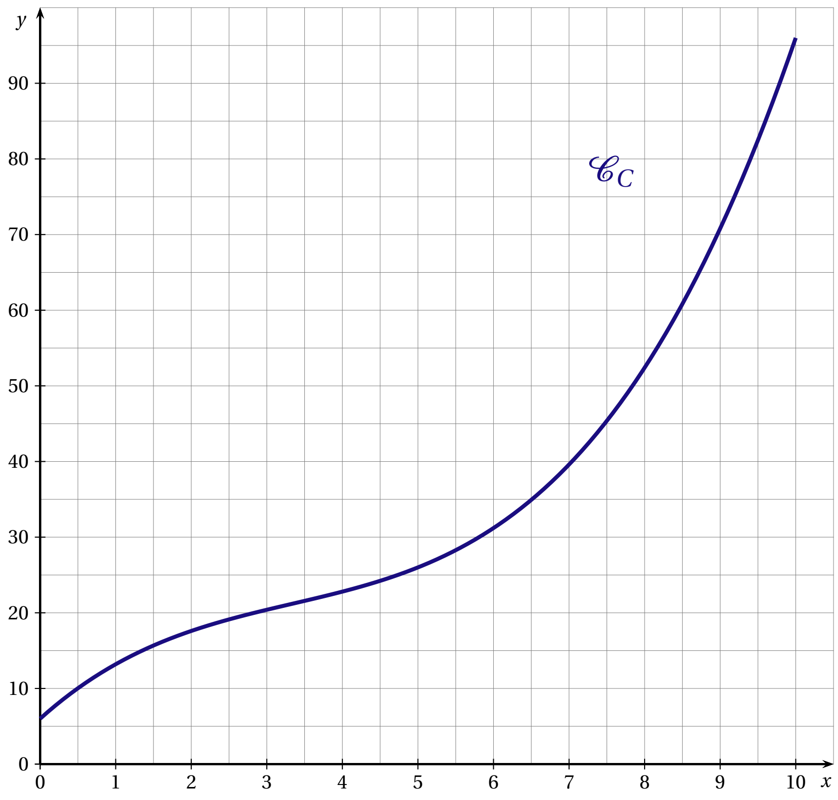
Annexe à rendre avec votre copie

Annexe de l'exercice 4

Soit C la fonction définie pour tout x élément de l'intervalle $]0;10]$ par :

$$C(x) = 0,2x^3 - 2x^2 + 9x + 6$$

La fonction C modélise le coût total de production, exprimé en milliers d'euros, de x milliers d'articles fabriqués.
La courbe représentative de la fonction C, notés $\mathscr{C}_C$ est tracée ci-dessous :



Annexe de l'exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 + 3}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.