



Math93.com

Devoir Surveillé n°5B

Correction

Première ES/L

Dérivation

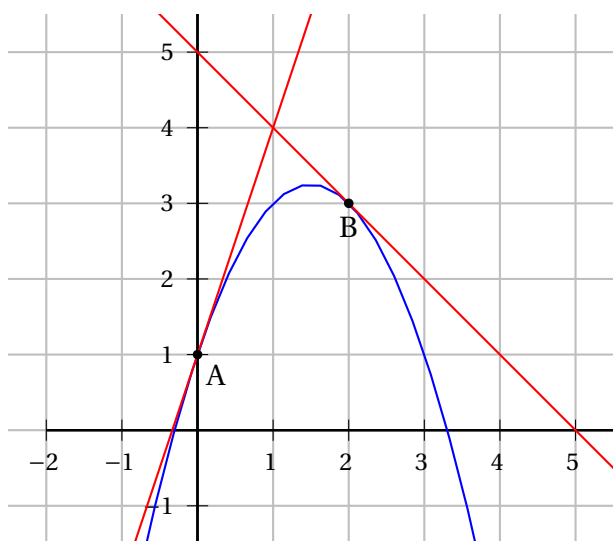
Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

Exercice 1. Lecture graphique puis calculs

2 points

On a tracé \mathcal{C}_f , la courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} ainsi que la tangente à \mathcal{C}_f aux points A et B d'abscisses respectives 0 et 2. Lire les nombres dérivés $f'(0)$ et $f'(2)$ et déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f aux points A et B.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = 3$$

2. Équation de T_0 , la tangente à \mathcal{C}_f en $A(0; 1)$:

$$y = 3x + 1$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(2) = -1$$

4. Équation de T_{-2} , la tangente à \mathcal{C}_f en $B(-2; -1)$:

$$y = -x + 5$$

Exercice 2. Le cours : A compléter

3 points

Ici u et v sont des fonctions dérivables sur I et k est une constante.

I	f de la forme	Dérivée de f
I	$u + v$	$u' + v'$
I	$u \times v$	$u'v + uv'$
v non nul sur I	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
v non nul sur I	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
I	u^2	$2uu'$
I	$k \times u$	ku'

Donner directement et sans justification la dérivée des fonctions suivantes sur l'intervalle I :

I	f définie sur I par :	Dérivée de f
$[2; 10]$	$f_1(x) = \frac{1}{3} + x^4$	$f_1'(x) = 4x^3$
$[2; 10]$	$f_2(x) = \sqrt{x}$	$f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$[2; 10]$	$f_3(x) = 5 - \frac{x}{3}$	$f_3'(x) = -\frac{1}{3}$
$[2; 10]$	$f_4(x) = \frac{x^2}{2}$	$f_4'(x) = x$
$[2; 10]$	$f_5(x) = \frac{1}{x}$	$f_5'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$[2; 10]$	$f_6(x) = x^2 + 1$	$f_6'(x) = 2x$

Sur votre copie double

Exercice 3. Une histoire de tangentes

4 points

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 72x$$

1. Déterminer la fonction dérivée de g sur \mathbb{R} .

La fonction g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = 6x^2 - 6x - 72$.

2. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à \mathcal{C}_g au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente (T_0) à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $a = 0$ est (T_0) : $y = g'(a)(x - a) + g(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0) = +0 \\ g'(0) = -72 \end{array} \right\} \Rightarrow (T_0) : \begin{array}{l} y = -72 \times (x - 0) + 0 \\ \underline{y = -72x} \end{array}$$

3. Déterminer, si ils existent, les abscisses des points de \mathcal{C}_g qui admettent une tangente horizontale.

Les abscisses des points de \mathcal{C}_g qui admettent une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $g'(x) = 0$.

L'expression $(6x^2 - 6x - 72)$ est une expression du second degré de la forme $(ax^2 + bx + c)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 6 \\ b = -6 \\ c = -72 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta = 1764 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \mapsto (6x^2 - 6x - 72)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{1764}}{12} = -3 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{1764}}{12} = 4 \in \mathbb{R}$$

Les abscisses des points de \mathcal{C}_g qui admettent une tangente horizontale sont donc -3 et 4.

Exercice 4.

3 points

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R}_+ par

$$h(x) = \frac{7 - 2x}{1 + 3x}$$

1. Déterminer la fonction dérivée de h sur \mathbb{R}_+ .

La fonction h est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+ .

La fonction h est de la forme $\frac{u}{v}$ donc de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 7 - 2x$	$u'(x) = -2$
$v(x) = 1 + 3x$	$v'(x) = 3$

Donc pour tout x de \mathbb{R}_+ :

$$h'(x) = \frac{-2 \times (1 + 3x) - (7 - 2x) \times 3}{(1 + 3x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2 - 6x - (21 - 6x)}{(1 + 3x)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-23}{(1 + 3x)^2}$$

$$\boxed{h'(x) = \frac{-23}{(1 + 3x)^2}}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T_0 à \mathcal{C}_h au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente (T_0) à la courbe \mathcal{C}_h au point d'abscisse $a = 0$ est (T_0) : $y = h'(a)(x - a) + h(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} h(0) = +7 \\ h'(0) = -23 \end{array} \right\} \Rightarrow (T_0) : \begin{array}{l} y = -23 \times (x - 0) + 7 \\ \underline{y = -23x + 7} \end{array}$$

Exercice 5.**4 points**

On considère la fonction j définie sur $[0 ; 10]$ par :

$$j(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{2 + 3x}$$

1. **Montrer que la dérivée de j est sur $[0 ; 10]$: $j'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 9}{(2 + 3x)^2}$.**

La fonction j est définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; 10]$. Elle est de la forme $\frac{u}{v}$ donc de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = x^2 - 3x + 1$	$u'(x) = (2x - 3)$
$v(x) = 2 + 3x$	$v'(x) = 3$

Pour tout réel x de $[0 ; 10]$:

$$j(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$j(x) = \frac{(2x - 3) \times (2 + 3x) - (x^2 - 3x + 1) \times (3)}{(2 + 3x)^2}$$

$$j(x) = \frac{4x + 6x^2 - 6 - 9x - 3x^2 + 9x - 3}{(2 + 3x)^2}$$

$$\forall x \in [0 ; 10] ; \quad j'(x) = \frac{3x^2 + 4x - 9}{(2 + 3x)^2}$$

2. **Existe-t-il des points de la courbe représentative de la fonction j , qui admettent une tangente horizontale? Si oui, déterminer leurs abscisses.**

Les abscisses des points de \mathcal{C}_j qui admettent une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $j'(x) = 0$. Or sur son ensemble de définition on a :

$$j'(x) = 0 \iff 3x^2 + 4x - 9 = 0$$

L'expression $(3x^2 + 4x - 9)$ est une expression du second degré de la forme $(ax^2 + bx + c)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 4 \\ c = -9 \end{array} \right. \implies \Delta = 124 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \mapsto (3x^2 + 4x - 9)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{124}}{6} \approx -2.5 \notin [0 ; 10] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{124}}{6} \approx 1.2 \in [0 ; 10]$$

Il existe donc sur $[0 ; 10]$, un seul point de la courbe qui admette une tangente horizontale, celui d'abscisse x_2 .

Exercice 6.**4 points**

On considère la fonction k définie sur $[1; +\infty[$ par : $k(x) = \frac{1-5x^2}{3-4x^2}$.

1. **Montrer que la fonction dérivée de k sur $[1; +\infty[$ est : $k'(x) = \frac{-22x}{(3-4x^2)^2}$.**

La fonction k est définie et dérivable sur l'intervalle $[1; +\infty[$. Elle est de la forme $\frac{u}{v}$ donc de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 1 - 5x^2$	$u'(x) = (-10x)$
$v(x) = 3 - 4x^2$	$v'(x) = -8x$

Pour tout réel x de $[1; +\infty[$:

$$k(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$k(x) = \frac{(-10x) \times (3 - 4x^2) - (1 - 5x^2) \times (-8x)}{(3 - 4x^2)^2}$$

$$k(x) = \frac{-30x + 40x^3 + 8x - 40x^3}{(3 - 4x^2)^2}$$

$$\forall x \in [1; +\infty[; \boxed{k'(x) = \frac{-22x}{(3-4x^2)^2}}$$

2. **Déterminer l'équation de la tangente T_1 à \mathcal{C}_k au point d'abscisse 1.**

L'équation de la tangente (T_1) à la courbe \mathcal{C}_k au point d'abscisse $a = 1$ est (T_1) : $y = k'(a)(x - a) + k(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\begin{cases} k(1) = +4 \\ k'(1) = -22 \end{cases} \Rightarrow (T_1) : \begin{cases} y = -22 \times (x - 1) + 4 \\ \underline{y = -22x + 26} \end{cases}$$

3. **Existe-t-il des points de la courbe représentative de la fonction k , qui admettent une tangente horizontale? Si oui, l'équation des tangentes.**

Les abscisses des points de \mathcal{C}_k qui admettent une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $k'(x) = 0$. Or sur son ensemble de définition on a :

$$k'(x) = 0 \iff -22x = 0 \iff x = 0 \notin [1; +\infty[$$

Il n'y a donc pas de tels points sur $[1; +\infty[$.