Math93.com

Devoir Surveillé n°7 Correction

Première ES/L

Dérivation et suites

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 0 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. 0 points

Adeline vient de gagner au loto une somme de 20 000 euros qu'elle veut placer. Sa banque lui propose de choisir entre deux placements. Placement A : Le capital augmente chaque année de 4 %. placement B : Le capital augmente chaque année de 2,5 % et une prime annuelle fixe de 330 euros est versée à la fin de chaque année et s'ajoute au capital. On note : a_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si Adeline choisit le placement A ; b_n le capital, en euro, acquis au bout de n années si elle choisit le placement B. On a donc $a_0 = b_0 = 20\,000$ et, pour tout entier naturel n,

$$a_{n+1} = 1,04a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = 1,025b_n + 330.$$

1. Dans cette question, on suppose que Adeline choisit le contrat A.

1. a. Calculer la valeur, arrondie à l'euro, du capital disponible au bout de 10 ans.
La suite (a_n) est géométrique de premier terme $a_0 = 20000$ et de raison $q = 1,04$ donc, pour tout n, on a :

$$a_n = a_0 \times q^n = 20000 \times 1,04^n$$

Donc $a_{10} = 20000 \times 1,04^n \approx 29605$.

Le capital disponible au bout de 10 ans est, arrondi à l'euro, 29 605 €.

1. b. Déterminer le pourcentage d'augmentation du capital entre le capital de départ et celui obtenu au bout de 10 **ans. Arrondir le résultat à 1 %.**
Le pourcentage d'augmentation est donné par la formule : $\dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}}$ Donc ici :

$$\frac{29605 - 20000}{20000} \approx 48\%$$

Le pourcentage d'augmentation en 10 ans a pour valeur arrondie à l'unité 48 %.

2. *Dans cette question, on suppose que Mathieu choisit le contrat B. On considère la suite (u_n) définie pour tout n par $u_n = 13200 + b_n$; donc $b_n = u_n - 13200$.*

2. a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique de raison 1,025 et calculer son premier terme u_0.
Pour tout entier n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 13200 + b_{n+1} \\ &= 13200 + 1,025b_n + 330 \\ &= 13530 + 1,025(u_n - 13200) \\ &= 13530 + 1,025u_n - 13530 \\ u_{n+1} &= 1,025u_n \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1,025$ et de premier terme u_0 avec :

$$u_0 = 13200 + b_0 = 13200 + 20000 = 33200$$

2. b. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
On en déduit que, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 33200 \times 1,025^n$.

2. c. En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $b_n = 33200 \times 1,025^n - 13200$.
Pour tout entier naturel n, on a

$$b_n = u_n - 13200$$

Donc, pour tout n,

$$b_n = 33200 \times 1,025^n - 13200$$

2. d. Montrer que la suite (b_n) est strictement croissante.
Pour tout entier n on a :

$$b_{n+1} - b_n = 33\,200 \times 1{,}025^{n+1} - 13\,200 - \left(33\,200 \times 1{,}025^n - 13\,200\right)$$
$$b_{n+1} - b_n = 33\,200 \times 1{,}025^{n+1} - 13\,200 - 33\,200 \times 1{,}025^n + 13\,200$$
$$b_{n+1} - b_n = 33\,200 \times 1{,}025^{n+1} - 33\,200 \times 1{,}025^n$$
$$b_{n+1} - b_n = 33\,200 \times \left(1{,}025^{n+1} - 1{,}025^n\right)$$
$$b_{n+1} - b_n = 33\,200 \times 1{,}025^n \left(1{,}025 - 1\right)$$
$$b_{n+1} - b_n = 33\,200 \times 1{,}025^n \left(0{,}025\right)$$

Donc pour tout entier n, on a : $b_{n+1} > b_n$ ce qui implique que la suite (b_n) est strictement croissante.

2. e. Déterminer au bout de combien d'années le capital disponible devient supérieur à 40 000 euros.
Le capital devient supérieur à 40000 pour n tel que $b_n > 40\,000$; on résout cette inéquation (si on a vu le chapitre sur le logarithme, ou on utilise la calculatrice) :

- Avec la calculatrice.
  La suite $(1{,}025^n)$ est strictement croissante car $1{,}025 > 1$ et la calculatrice donne :

n	b_n
19	39875.18616
20	41202.06582

- Conclusion : donc le capital devient supérieur à 40000 € au bout de 20 ans.

3. On considère l'algorithme suivant :

Pseudo Code

```
A ← 20 000
B ← 20 000
N ← 0
Tant que A ≤ B  Faire
    A ← 1,04 × A
    B ← 1,025 × B + 330
    N ← N + 1
Fin Tant que
Afficher N
```

3. a. Le tableau ci-dessous traduit l'exécution pas à pas de l'algorithme.
On complète ce tableau en arrondissant les valeurs de A et de B à l'unité :

Valeur de A	20 000	20 800	21 632	22 497	23 397	24 333	25 306
Valeur de B	20 000	20 830	21 681	22 553	23 447	24 363	25 302
Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6
Condition $A \leqslant B$	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	vraie	fausse

3. b. Donner la valeur affichée en sortie par cet algorithme et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
La valeur affichée en fin d'algorithme est 6.
Si Adeline veut faire un placement d'une durée inférieure à 6 ans, il vaut mieux qu'elle prenne le placement B, pour six ans il vaut mieux prendre le placement A. Au delà, le tableau ne permet pas de se prononcer mais on pourrait démontrer que le placement A reste à partir de six ans le plus rentable.

Fin du devoir