Math93.com

Devoir Surveillé n°2A
Première ES
Second degré
Durée 1 heure - Coeff. 5
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Tableau de variations — 2 points

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 7$

L'expression $\left(-2x^2 + \ 8x - 7\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 8 \\ c = -7 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Delta & = (8)^2 - 4 \times (-2) \times (-7) = 8 > 0 \\ \alpha & = \dfrac{-8}{2 \times (-2)} = 2 \\ \beta & = \dfrac{-8}{4 \times (-2)} = 1 \end{array}\right.$$

Puisque le coefficient de x^2 soit $a = -2$ est négatif, f est décroissante puis croissante :

x	$-\infty$	$\alpha = 2$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	$\beta = 1$	$\searrow$

2. g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - \dfrac{x}{2} - 3$

L'expression $\left(x^2 - 0{,}5x - 3\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -0.5 \\ c = -3 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Delta & = (-0.5)^2 - 4 \times (1) \times (-3) = 12.25 > 0 \\ \alpha & = \dfrac{0.5}{2 \times (1)} = \dfrac{1}{4} \\ \beta & = \dfrac{-12.25}{4 \times (1)} = \dfrac{-49}{16} \end{array}\right.$$

Puisque le coefficient de x^2 soit $a = 1$ est positif, g est décroissante puis croissante :

x	$-\infty$	$\alpha = \dfrac{1}{4}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	$\beta = \dfrac{-49}{16}$	$\nearrow$

Exercice 2. Équations et inéquations 6 points

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. a. $2x^2+3x-2=0$

L'expression $\left(2x^2+\ 3x\ -2\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=3 \\ c=-2 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=25>0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(2x^2+\ 3x\ -2\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-3-\sqrt{25}}{4}=-2 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-3+\sqrt{25}}{4}=0.5$$

1. b. $5x^2-9x+3=-4x^2+3x-1$

On a facilement :

$$5x^2-9x+3=-4x^2+3x-1 \iff 9x^2-12x+4=0$$

L'expression $\left(9x^2\ -12x+\ 4\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=9 \\ b=-12 \\ c=4 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=0$$

Le discriminant Δ étant nul, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(9x^2\ -12x+\ 4\right)$ admet une unique racine réelle :

$$x_1=\frac{2}{3}\approx 0.67$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

2. a. $-6x^2-x+2\leqslant 0$

L'expression $\left(-6x^2\ -1x+\ 2\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-6 \\ b=-1 \\ c=2 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=49>0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-6x^2\ -1x+\ 2\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{1-\sqrt{49}}{-12}=0.5 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{1+\sqrt{49}}{-12}\approx -0.67$$

L'expression est alors du signe de $a=-6$ soit négative à l'extérieur des racines et positive entre.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $-6x^2-x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc

$$\boxed{-6x^2-x+2\leqslant 0 \iff x\in\left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[}$$

2. b. $4x^2<8x-3$

$$4x^2<8x-3 \iff 4x^2-8x+3<0$$

L'expression $\left(4x^2\ -8x+\ 3\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=4 \\ b=-8 \\ c=3 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=16>0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(4x^2 - 8x + 3\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{8 - \sqrt{16}}{8} = 0.5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{16}}{8} = 1.5$$

L'expression est alors du signe de $a = 4$ soit positive à l'extérieur des racines et négative entre.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $4x^2 - 8x + 3$		+	0	−	0	+	

Donc

$$\boxed{4x^2 - 8x + 3 < 0 \iff x \in \left]\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right[}$$

Exercice 3. Un problème — 12 points

Une entreprise fabrique un produit « Bêta ». La production mensuelle ne peut pas dépasser 15 000 articles. Le coût total, exprimé en milliers d'euros, de fabrication de x milliers d'articles est modélisé par la fonction C définie sur $]0;15]$ par :

$$C(x) = 0,5x^2 + 0,6x + 8,16$$

La représentation graphique Γ de la fonction coût total est donnée dans l'annexe ci-dessous à rendre avec la copie. On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8 €.

1. **Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 4 000 articles ou fabriquer et vendre 12 000 articles ?**
   Le bénéfice s'obtient en calculant les recettes moins les coûts donc :

   - Fabriquer et vendre 4 000 articles donne un bénéfice en milliers d'euros de :

     $$4 \times 8 - C(4) = 13,44 \quad \text{soit} \quad \underline{13\,440€}$$

   - Fabriquer et vendre 12 000 articles donne un bénéfice de :

     $$12 \times 8 - C(12) = 8,64 \quad \text{soit} \quad \underline{8\,640€}$$

   - Il est donc préférable pour l'entreprise de fabriquer et vendre 4 000 articles.

2. **On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles du produit « Bêta ». On a donc $R(x) = 8x$.**

   2. a. Tracer dans le repère donné en annexe la courbe $\mathscr{D}$ représentative de la fonction recette.
   La fonction R est une fonction linéaire donc sa courbe est une droite passant par l'origine du repère et par le point de coordonnées $(10; 80)$ par exemple.

   2. b. Par lecture graphique déterminer :

   - **l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif;**
     Pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif il faut que la courbes des recettes soit au-dessus de celle des coûts donc graphiquement il faut que x soit entre 1,5 et 13,5 environ. Ce qui correspond à une production comprise entre 1 200 et 13 500 articles.
   - **la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.**
     Le bénéfice maximal s'obtient quand l'écart entre les deux courbes est le plus grand et positif, soit environ pour $x_0 = 7,5$. Ce qui correspond à une production de 7 500 unités. Ce bénéfice est d'environ 20 milliers d'euros.

3. **On désigne par $B(x)$ le bénéfice mensuel, en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles.**

   3. a. Montrer que le bénéfice exprimé en milliers d'euros, lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles, est donné par $B(x) = -0,5x^2 + 7,4x - 8,16$ avec $x \in]0;15]$.
   Le bénéfice s'obtient en calculant les recettes moins les coûts donc en milliers d'euros on a :

   $$B(x) = 8x - C(x) = 8x - (0,5x^2 + 0,6x + 8,16) = \underline{-0,5x^2 + 7,4x - 8,16}$$

3. b. Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

L'expression $\left(-0.5x^2 + \ 7{,}4x \ -8{,}16\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-0.5 \\ b=7.4 \\ c=-8.16 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 38.44 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-0.5x^2 + \ 7{,}4x \ -8{,}16\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-7.4-\sqrt{38.44}}{-1} = 13.6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7.4+\sqrt{38.44}}{-1} = 1.2$$

L'expression est alors du signe de $a=-0.5$ soit négative à l'extérieur des racines et positive entre.

x	$-\infty$		1.2		13.6		$+\infty$
signe de $B(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc

$$\boxed{B(x) > 0 \iff x \in [1{,}2\,;\,13{,}6]}$$

La plage de production est donc entre 1 200 et 13 600 articles.

3. c. Étudier les variations de la fonction B sur $]0;15]$. En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

L'expression $\left(-0.5x^2 + \ 7{,}4x \ -8{,}16\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

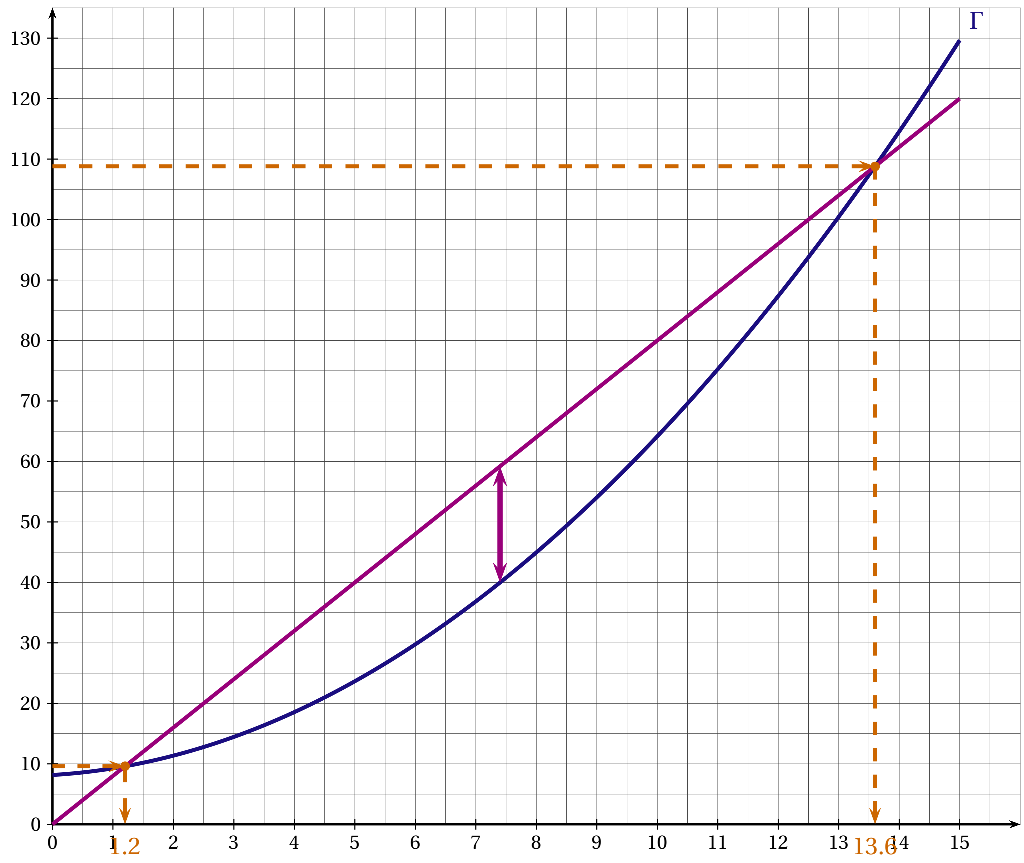
$$\left\{\begin{array}{l} a=-0.5 \\ b=7.4 \\ c=-8.16 \end{array}\right| \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Delta & = (7.4)^2 - 4\times(-0.5)\times(-8.16) = 38.44 > 0 \\ \alpha & = \dfrac{-7.4}{2\times(-0.5)} = \dfrac{37}{5} \\ \beta & = \dfrac{-38.44}{4\times(-0.5)} = \dfrac{961}{50} \end{array}\right.$$

Puisque le coefficient de x^2 soit $a=-0.5$ est négatif, B est croissante puis décroissante :

x	0		$\alpha = \frac{37}{5} = 7.4$		15
Variations de B	-8.16	$\nearrow$	$\beta = 19.22$	$\searrow$	-9.66

La production est donc de 7 400 article pour un bénéfice maximal de 19 220 euros.

Fin du devoir


Γ
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
1.2
13.6