Math93.com

Devoir Surveillé n°3A Correction

Première ES

Bilan 1T

Durée 2 heures - Coeff. 10

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. 5 points

1. Après avoir étudier les valeurs interdites, résoudre l'inéquation : $\dfrac{(x^2-5x+4)(2x-4)}{x^2-9} \geq 0$.

- Valeurs interdite : il faut que x^2-9 soit différents de 0 donc les valeurs interdites sont 3 et (-3).
- Signe de (x^2-9).
  L'expression (x^2-9) est du second degré, de la forma ax^2+bx+c avec $a=1$; $b=0$ et $c=-9$. Les racines sont 3 et (-3) et (x^2-9) est du signe de $a=1$ donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre.
- Signe de (x^2-5x+4).

  L'expression $\left(x^2-5x+4\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=9>0$$

  Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(x^2-5x+4\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2}=4$$

  Donc (x^2-5x+4) est du signe de $a=1$ donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre.
- Signe de $(2x-4)$.
  On a :

$$\begin{cases} 2x-4=0 \iff x=2 \\ 2x-4>0 \iff x>2 \end{cases} \Longrightarrow 2x-4<0 \iff x<2$$

- On résume l'étude dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		-3		1		2		3		4		$+\infty$
signe de (x^2-9)		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de (x^2-5x+4)		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(2x-4)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $\dfrac{(x^2-5x+4)(2x-4)}{x^2-9}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Donc

$$\boxed{\frac{(x^2-5x+4)(2x-4)}{x^2-9} \geq 0 \iff x \in]-3\,;\,1] \cup]2\,;\,3[\cup [4\,;\,+\infty[}$$

2. Résoudre l'équation bicarrée : $2x^4 - 2x^2 - 24 = 0$.

- Posons $X = x^2$, on a alors :

$$2x^4 - 2x^2 - 24 = 0 \iff \begin{cases} X = x^2 \\ 2X^2 - 2X - 24 = 0 \end{cases}$$

- On résout alors l'équation du second degré en X.
L'expression $\left(2X^2 - 2X - 24\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^2 + bX + c\right)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ b = -2 \\ c = -24 \end{array} \right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 196 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $X \longmapsto \left(2X^2 - 2X - 24\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{2 - \sqrt{196}}{4} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2 + \sqrt{196}}{4} = 4$$

- On revient à l'équation initiale.
  - $X = x^2$ donc la première solution $X_1 = -3$ ne convient pas puisque x^2 est toujours positif pour x réel.
  - $X = x^2$ donc la deuxième solution $X_2 = 4$ donne :

$$x^2 = 4 \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{array} \right.$$

  - Conclusion : les deux seules solutions de l'équation bicarrée sont $\underline{2 \text{ et } (-2)}$.

Exercice 2. 4 points

1. Après une hausse de 8 % le prix d'un article est de 351 €. Quel était le prix de cet article avant la hausse ?
Effectuer une hausse de 8% c'est multiplier par 1,08 donc le prix de cet article avant la hausse est :

$$\frac{351}{1{,}08} = \underline{325€}$$

2. Après une baisse de 6 % le prix d'un article est de 329 €. Quel était le prix de cet article avant la baisse ?
Effectuer une baisse de 6% c'est multiplier par 0,94 donc le prix de cet article avant la baisse est :

$$\frac{329}{0{,}94} = \underline{350€}$$

3. *Le cours d'une action a successivement augmenté de 15 % puis baissé de 20 %.*

3. a. Quel est le pourcentage d'évolution global de cette action ?
Le coefficient multiplicateur associé à ces deux évolutions est :

$$k = 1{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}92$$

Cela correspond à une évolution globale de $t\% = k - 1 = -8\%$ et donc à une baisse de 8%.

3. b. Si le cours initial de cette action était de 145 euros, quel sera son cours final ?
Si le cours initial de cette action était de 145 euros, son cours final sera de :

$$145 \times 0{,}92 = \underline{133{,}4€}$$

3. c. Quel devra être le taux du pourcentage d'évolution pour que cette action retrouve son cours initial ?
Le taux du pourcentage d'évolution pour que cette action retrouve son cours initial est le le taux d'évolution réciproque soit :

$$t_r\% = \frac{1}{0{,}92} - 1 \approx 0{,}0869565 \approx \underline{8{,}7\%}$$

Tournez la page ...

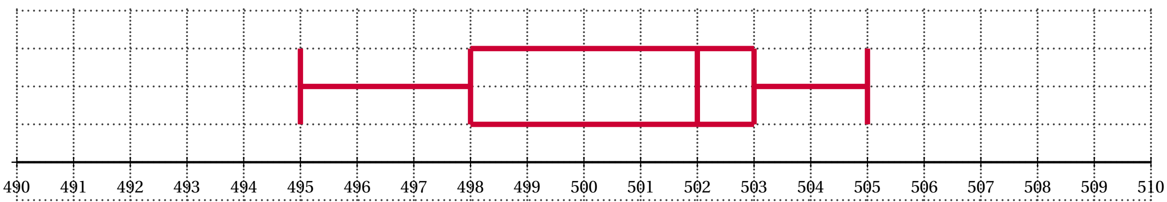
Exercice 3. Une entreprise de produits alimentaires — 4 points

Une entreprise de produits alimentaires conditionne des pâtes dans des sachets de 500 grammes. On suppose que le poids du sachet vide est négligeable. Pour vérifier le réglage de la machine utilisée pour remplir les sachets, un échantillon aléatoire de 200 sachets est prélevé dans la production ; on mesure la masse de chaque sachet et on calcule la moyenne $\overline{m}$ des masses des sachets de l'échantillon ainsi que l'écart-type σ. Au cours de la production, l'échantillon suivant a été prélevé.

Masses en grammes	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505
Effectifs	10	10	15	20	10	20	10	30	35	20	20
Effectifs Cumulés croissants	10	20	35	55	65	85	95	125	160	180	200

1. **Calculer la médiane et les quartiles en expliquant votre raisonnement.**
   - Il y a 200 valeurs donc la médiane sera comprise entre les valeurs de rang 100 et 101 soit $M_e = 502$ g.
   - Il y a 200 valeurs et $200 \div 4 = 50$ donc le premier quartile Q_1 sera la valeur de rang 50 soit $Q_1 = 498$ g.
   - Il y a 200 valeurs et $3 \times 200 \div 4 = 150$ donc le premier quartile Q_3 sera la valeur de rang 150 soit $Q_3 = 503$ g.

2. **Représenter la dispersion de cette série à l'aide d'un diagramme en boîte sur l'annexe 1 en page 1.**



3. **Calculer la moyenne $\overline{m}$ de l'échantillon.** ***(On pourra écrire la formule de calcul puis utiliser la calculatrice pour obtenir directement le résultat).***

$$\overline{m} = \frac{495 \times 10 + \cdots + 505 \times 20}{200} = \frac{100\ 170}{200} \approx 500,85 \text{ g}$$

4. **Donner l'arrondi au centième près de l'écart-type σ de la série (directement à l'aide de la calculatrice).**
   La calculatrice donne, arrondi au centième près : $\sigma \approx 2,96$ g.

5. *Un réglage de précision de la machine est nécessaire si l'un des critères suivants n'est pas vérifié :*
   - *les sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle* $[495 ; 505]$ *;*
   - *au moins la moitié des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle* $[498 ; 502]$ *;*
   - *95% au moins des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle* $[\overline{m} - 2\sigma ; \overline{m} + 2\sigma]$.

   Faut-il effectuer un réglage de précision de la machine ? (Justifier)

   - les sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $[495 ; 505]$:
     Cette condition est vérifiée puisque les valeurs minimale et maximale de la série sont 495 et 505.
   - au moins la moitié des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $[498 ; 502]$;
     Le nombre de valeurs de la série comprises dans l'intervalle $[498 ; 502]$ est de : $20 + 10 + 20 + 10 + 30 = 90$. Ce qui correspond à moins de la moitié des 200 valeurs. Cette condition n'est pas vérifiée.
     On doit donc effectuer le réglage.
     On pouvait s'arrêter la.
   - 95% au moins des sachets ont une masse en grammes comprise dans l'intervalle $[\overline{m} - 2\sigma ; \overline{m} + 2\sigma]$.
     On a avec $\overline{m} \approx 500,85$ g et $\sigma \approx 2,96$ g :

$$[\overline{m} - 2\sigma ; \overline{m} + 2\sigma] \approx [494,93 ; 506,77]$$

   Or on a dans cet intervalle les valeurs comprises entre 495 et 505 qui sont au nombre de 200 (soit 100%)

Exercice 4. 7 points

Une entreprise fabrique et commercialise un certain produit. Sa capacité de production mensuelle est inférieure à 14 milliers d'articles. Soit x le nombre de milliers d'articles fabriqués chaque mois; le coût de production exprimé en milliers d'euros est modélisé par la fonction C définie pour tout x élément de l'intervalle $]0;14]$ *par*

$$C(x) = 0,5x^2 + x + 10,72$$

La courbe représentative de la fonction C, notée $\mathscr{C}_T$*, est donnée en annexe* <u>*sur l'annexe 2 en page 1*</u>*. On admet que chaque article fabriqué est vendu au prix unitaire de 8,50 €.*

1. Qu'est ce qui est plus avantageux pour l'entreprise fabriquer et vendre 7 000 articles ou fabriquer et vendre 9 000 articles?

- Fabriquer et vendre 7 000 articles donne un bénéfice en milliers d'euros de :

$$7 \times 8,5 - C(7) = 59,5 - 42,22 = 17,28 \quad \text{soit} \quad \underline{17\,280€}$$

- Fabriquer et vendre 12 000 articles donne un bénéfice de :

$$9 \times 8,5 - C(9) = 76,5 - 60,22 = 16,28 \quad \text{soit} \quad \underline{16\,280€}$$

- Il est donc préférable pour l'entreprise de fabriquer et vendre 7 000 articles.

2. On désigne par $R(x)$ le montant en milliers d'euros de la recette mensuelle obtenue pour la vente de x milliers d'articles. On a donc $R(x) = 8,5x$.

2. a. Tracer dans le repère donné en annexe, la droite $\mathscr{D}$ représentative de la fonction recette .

2. b. Par lecture graphique déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif.

Pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif il faut que la courbes des recettes soit au-dessus de celle des coûts donc graphiquement il faut que x soit entre 1,5 et 13,5 environ. Ce qui correspond à une production comprise entre 1 500 et 13 500 articles.

3. *Le bénéfice mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé lorsque l'entreprise produit et vend x milliers d'articles est modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle* $]0;14]$ *par* $B(x) = R(x) - C(x)$.

3. a. Étudier le signe de $B(x)$. En déduire la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif).

Pour x de l'intervalle $]0;14]$ on a :

$$B(x) = R(x) - C(x) = 8,5x - \left(0,5x^2 + x + 10,72\right) = \underline{-0,5x^2 + 7,5x - 10,72}$$

L'expression $\left(-0.5x^2 + \ 7,5x \ -10,72\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -0.5 \\ b = 7.5 \\ c = -10.72 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 34.81 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-0.5x^2 + \ 7,5x \ -10,72\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-7.5 - \sqrt{34.81}}{-1} = 13.4 \in]0;14] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7.5 + \sqrt{34.81}}{-1} = 1.6 \in]0;14]$$

Puisque $a = -0,5$ est négatif, $B(x)$ est positif entre les deux racines et négatif ailleurs.

La plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (positif) est donc entre 1,6 milliers et 13,4 milliers d'articles soit <u>entre 1 600 et 13 400 articles</u>.

3. b. Étudier les variations de la fonction B sur $]0;14]$. En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre chaque mois pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?

L'expression $\left(-0.5x^2 + \ 7,5x \ -10,72\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -0.5 \\ \\ b = 7.5 \\ \\ c = -10.72 \end{array}\right| \Longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Delta & = (7.5)^2 - 4 \times (-0.5) \times (-10.72) = 34.81 > 0 \\ \alpha & = \dfrac{-7.5}{2 \times (-0.5)} = \dfrac{15}{2} \\ \beta & = \dfrac{-34.81}{4 \times (-0.5)} = \dfrac{3481}{200} \end{array}\right.$$

Puisque le coefficient de x^2 soit $a = -0.5$ est négatif, B est croissante puis décroissante :

x	0	$\alpha = \frac{15}{2} = 7.5$	14
Variations de B	$\|\|$ -8.16 ↗	$\beta = 17.405$	↘ -9.66

La production est donc de <u>7 500 article pour un bénéfice maximal de 17 405 euros</u>.

Fin du devoir