



Math93.com

Devoir Surveillé n°4

Correction

Première ES/L

Dérivation

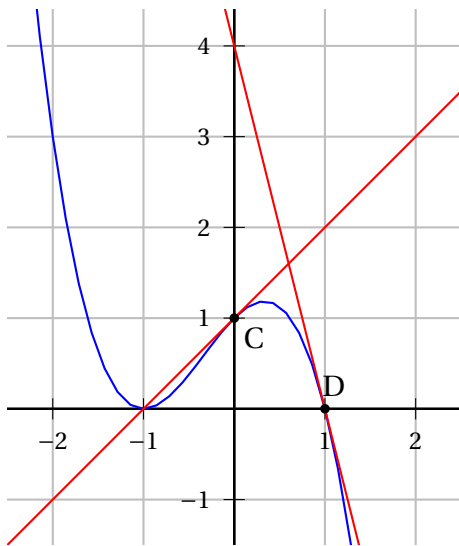
Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. Lectures graphiques

2 points



A compléter sur cette feuille

1. Lectures graphiques :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

2. Équation de T_0 , la tangente à \mathcal{C}_f en $C(0; 1)$:

$$y = x + 1$$

3. Équation de T_1 , la tangente à \mathcal{C}_f en $D(1; 0)$:

$$y = -4x + 4$$

Exercice 2. Calculs directs

2 points

A compléter sur cette feuille

1. f_1 définie sur I par $f_1(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 5$,alors $f_1'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 1$

2. f_2 définie sur I par $f_2(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} + 1$,alors $f_2'(x) = 6x + \frac{3}{x^2}$

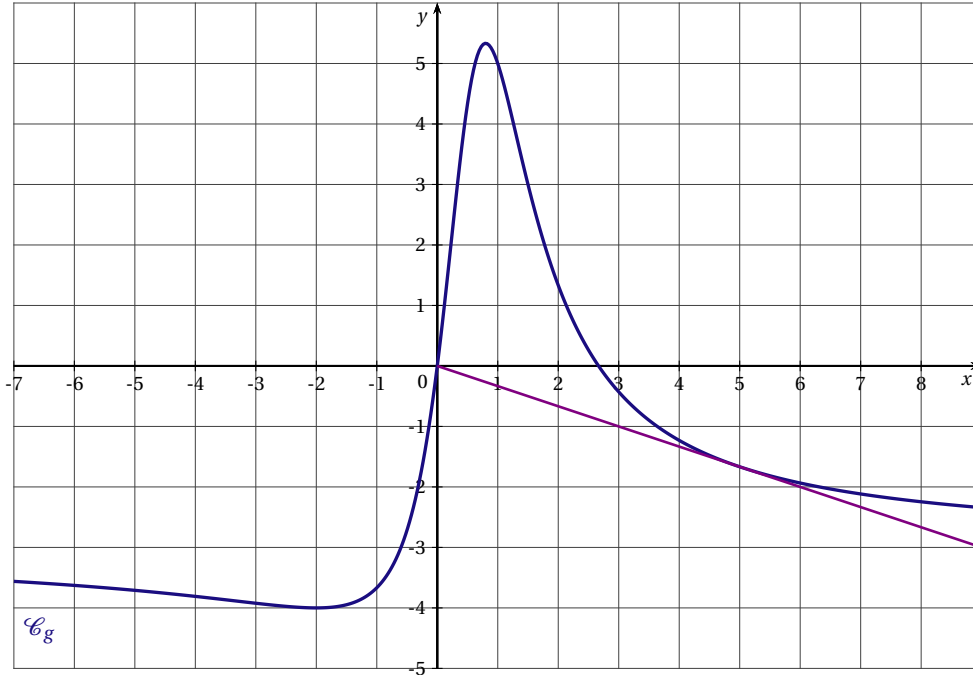
3. f_3 définie sur I par $f_3(x) = \sqrt{x} - x$,alors $f_3'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$

4. f_4 définie sur I par $f_4(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$,alors $f_4'(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(1 + x^2)^2}$

Exercice 3. Une fonction

8 points

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = \frac{8x - 3x^2}{x^2 - x + 1}$. On note g' la dérivée de la fonction g . On donne ci-dessous la courbe \mathcal{C}_g représentative de la fonction g .



1.

1. a. Montrer que le polynôme du second degré défini sur \mathbb{R} par $P(x) = x^2 - x + 1$ n'admet pas de racines réelles. Pourquoi cela prouve-t-il que la fonction g est bien définie sur \mathbb{R} ?

L'expression $(x^2 - x + 1)$ est un expression du second degré de la forme $(ax^2 + bx + c)$. Avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = -3 < 0$$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, la fonction polynôme du second degré $x \mapsto (x^2 - x + 1)$ n'admet pas de racine réelle. Donc la fonction g est bien définie sur \mathbb{R} puisque qu'il faut que son dénominateur ne soit pas nul.

1. b. Montrer que pour tout réel x ,

$$g'(x) = \frac{-5x^2 - 6x + 8}{(x^2 - x + 1)^2}$$

La fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle \mathbb{R} . Elle est de la forme $\frac{u}{v}$ donc de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

| | |
|----------------------|--------------------|
| $u(x) = 8x - 3x^2$ | $u'(x) = (8 - 6x)$ |
| $v(x) = x^2 - x + 1$ | $v'(x) = 2x - 1$ |

Pour tout réel x de \mathbb{R} :

$$g(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$g(x) = \frac{(8 - 6x) \times (x^2 - x + 1) - (8x - 3x^2) \times (2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$g(x) = \frac{8x^2 - 8x + 8 - 6x^3 + 6x^2 - 6x - 16x^2 + 8x + 6x^3 - 3x^2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} ; \boxed{g'(x) = \frac{-5x^2 - 6x + 8}{(x^2 - x + 1)^2}}$$

2. Déterminer par le calcul les coordonnées des points de la courbe \mathcal{C}_g qui admettent une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale). Tracer sur le graphique donné, les points A et B ainsi que les 2 tangentes horizontales. Les abscisses des points présentant une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $g'(x) = 0$ et donc de l'équation $-5x^2 - 6x + 8 = 0$.

L'expression $(-5x^2 - 6x + 8)$ est une expression du second degré de la forme $(ax^2 + bx + c)$. Avec :

$$\begin{cases} a = -5 \\ b = -6 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 196 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \mapsto (-5x^2 - 6x + 8)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{196}}{-10} = 0.8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{196}}{-10} = -2$$

Les deux points sont donc :

$$A(0,2; g(0,2)) \quad \text{et} \quad B(-2; g(-2)) \Rightarrow \boxed{A\left(0,2; \frac{16}{3}\right) \quad \text{et} \quad B(-2; -4)}$$

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C}_g au point C d'abscisse 5. Tracer sur le graphique donné, le point C et la tangente T .

L'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_g au point d'abscisse $a = 5$ est $(T) : y = g'(a)(x - a) + g(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\begin{cases} g(5) = -\frac{5}{3} \\ g'(5) = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow (T) : y = -\frac{1}{3} \times (x - 5) - \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{x}{3}}$$

Exercice 4. Une histoire de tangentes et de second degré

4 points

On considère la fonction h définie et dérivable sur \mathbb{R} par : $h(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x$.

1. Déterminer la dérivée de h sur \mathbb{R} .

$$h'(x) = 3x^2 - 15x + 18$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T à \mathcal{C}_h au point d'abscisse -1 . L'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_h au point d'abscisse $a = 5$ est $(T) : y = h'(a)(x - a) + h(a)$.

Donc ici on obtient :

$$\begin{cases} h(5) = -\frac{53}{2} \\ h'(5) = 36 \end{cases} \Rightarrow (T) : y = 36 \times (x - 1) - \frac{53}{2} \Rightarrow \boxed{y = 36x + \frac{19}{2}}$$

3. Déterminer les abscisses des points de \mathcal{C}_h qui admettent une tangente horizontale.

Les abscisses des points présentant une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $h'(x) = 0$ et donc de l'équation $3x^2 - 15x + 18 = 0$.

L'expression $(3x^2 - 15x + 18)$ est une expression du second degré de la forme $(ax^2 + bx + c)$. Avec :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = -15 \\ c = 18 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 9 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \mapsto (3x^2 - 15x + 18)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{15 - \sqrt{9}}{6} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{15 + \sqrt{9}}{6} = 3$$

Exercice 5. Coût marginal**4 points****Définition 1** (Coût Marginal (Marginal Cost))

En économie, le coût marginal pour une quantité q produite, est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire, soit le coût de la $(q+1)^e$ unité :

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q)$$

Le coût de production, exprimé en centaines d'euros, pour q objets produits est donné pour q positif par :

$$C(q) = 0,01q^2 + 2q + 1,5$$

1. Montrer que le coût marginal $C_m(q)$ est égal à : $C_m(q) = 0,02q + 2,01$.

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q)$$

$$C_m(q) = 0,01(q+1)^2 + 2(q+1) + 1,5 - (0,01q^2 + 2q + 1,5)$$

$$C_m(q) = 0,01(q^2 + 2q + 1) + 2q + 2 + 1,5 - 0,01q^2 - 2q - 1,5$$

$$C_m(q) = 0,01q^2 + 0,02q + 0,01 + 2 - 0,01q^2$$

$$C_m(q) = \underline{0,02q + 2,01}$$

2. Une approximation classique.

Propriété 1

Le coût marginal est souvent approché par la dérivée de la fonction coût total si cette dernière est bien dérivable. On a alors dans l'ensemble de définition :

$$C_m(q) \approx C'(q)$$

Calculer ici la dérivée de la fonction coût total $C'(q)$.

$$C'(q) = \underline{0,02q + 2}$$

3. Quand on remplace $C_m(q)$ par $C'(q)$, on commet une erreur $E(q) = C'(q) - C_m(q)$. Calculer $E(q)$.

$$E(q) = C'(q) - C_m(q) = \underline{0,01}$$

4. Déterminer le coût marginal (en euros) pour une production de 1 000 objets et préciser l'erreur commise (en euros) si on remplace $C_m(q)$ par $C'(q)$.

Pour une production de $q = 1000$ objets, l'erreur commise est de : $E(1000) = 0,01$ centaines d'euros soit de 1 euros.

∞ Fin du devoir ∞