Math93.com

Devoir Surveillé n°4

Première ES/L

Dérivation

Durée 1 heure - Coeff. 5

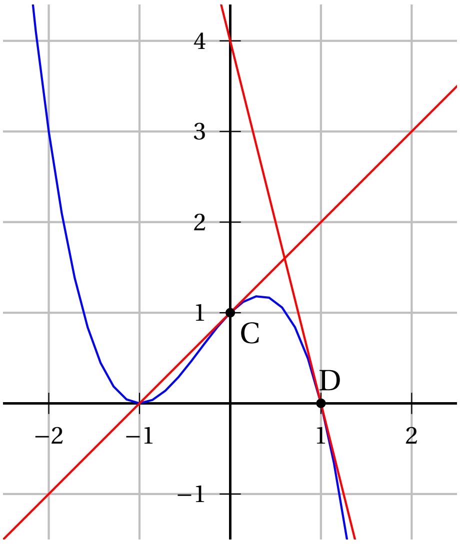
Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

BARÈME (sur 20 points)				Note
Exercice 1	:	2	points	
Exercice 2	:	2	points	
Exercice 3	:	8	points	
Exercice 4	:	4	points	
Exercice 5	:	4	points	
			Total	

Exercice 1. Lectures graphiques — 2 points

On a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points C et D d'abscisses respectives 0 et 1. Lire les nombres dérivés $f'(0)$ et $f'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points C et D.



A compléter sur cette feuille

1. Lectures graphiques :

$$\begin{cases} f(0) = \cdots\cdots \\ f'(0) = \cdots\cdots \end{cases}$$

2. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $C(0\,;\,1)$:

$$y = \cdots\cdots$$

3. Équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $D(1\,;\,0)$:

$$y = \cdots\cdots$$

Exercice 2. Calculs directs — 2 points

Déterminer sans justification, la dérivée des fonctions suivantes, définies et dérivables sur $I = [2\,;\,10]$.

A compléter sur cette feuille

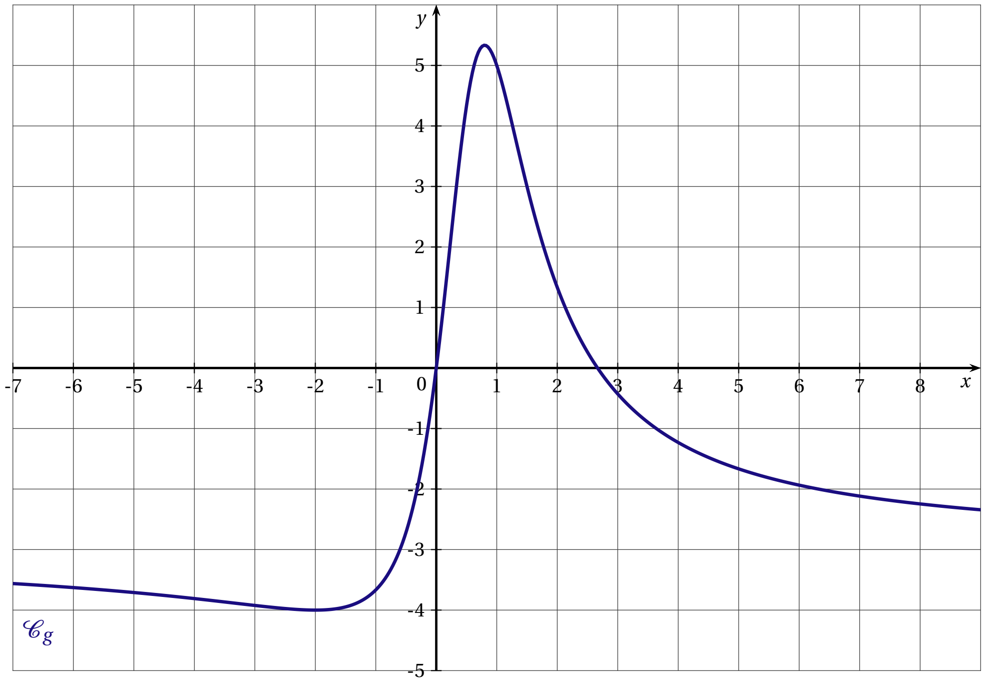
1. f_1 définie sur I par $f_1(x) = 3x^4 - 5x^3 + x - 5$,alors $f_1'(x) = \cdots\cdots$
2. f_2 définie sur I par $f_2(x) = 3x^2 - \dfrac{3}{x} + 1$,alors $f_2'(x) = \cdots\cdots$
3. f_3 définie sur I par $f_3(x) = \sqrt{x} - x$,alors $f_3'(x) = \cdots\cdots$
4. f_4 définie sur I par $f_4(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$,alors $f_4'(x) = \cdots\cdots$

Exercice 3. Une fonction — 8 points

Soit g la fonction définie pour tout réel x par

$$g(x) = \frac{8x - 3x^2}{x^2 - x + 1}$$

On note g' la dérivée de la fonction g.
On donne ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_g$ représentative de la fonction g.



1.

1. a. Montrer que le polynôme du second degré défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - x + 1$ n'admet pas de racines réelles. Pourquoi cela prouve-t-il que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$?

1. b. Montrer que pour tout réel x,

$$g'(x) = \frac{-5x^2 - 6x + 8}{\left(x^2 - x + 1\right)^2}$$

2. Déterminer par le calcul les coordonnées des points de la courbe $\mathscr{C}_g$ qui admettent une tangente parallèle à l'axe des abscisses (horizontale). Tracer sur le graphique donné, les points A et B ainsi que les 2 tangentes horizontales .

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point C d'abscisse 5.

Tracer sur le graphique donné, le point C et la tangente T.

Exercice 4. Une histoire de tangentes et de second degré — 4 points

On considère la fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 18x$$

1. Déterminer la dérivée de h sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse -1.

3. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_h$ qui admettent une tangente horizontale.

Exercice 5. Coût marginal — 4 points

Définition 1 (Coût Marginal (Marginal Cost))

En économie, le coût marginal pour une quantité q produite, est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire, soit le coût de la $(q+1)^e$ unité :

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q)$$

Le coût de production, exprimé en centaines d'euros, pour q objets produits est donné pour q positif par :

$$C(q) = 0,01q^2 + 2q + 1,5$$

1. Montrer que le coût marginal $C_m(q)$ est égal à :

$$C_m(q) = 0,02q + 2,01$$

2. Une approximation classique.

Propriété 1

Le coût marginal est souvent approché par la dérivée de la fonction coût total si cette dernière est bien dérivable . On a alors dans l'ensemble de définition :

$$C_m(q) \approx C'(q)$$

Calculer ici la dérivée de la fonction coût total $C'(q)$.

3. Quand on remplace $C_m(q)$ par $C'(q)$, on commet une erreur $E(q) = C'(q) - C_m(q)$. Calculer $E(q)$.

4. Déterminer le coût marginal (en euros) pour une production de 1 000 objets et préciser l'erreur commise (en euros) si on remplace $C_m(q)$ par $C'(q)$.

Fin du devoir

Bonus [0.5 point]
Déterminer une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, et dont la dérivée est $f'(x) = x^2 - 3x + 2$.

Bonus [0.5 point]
Déterminer une fonction g, définie sur $\mathbb{R}$, et dont la dérivée est $g'(x) = x^3 - x + \frac{1}{3}$.