Math93.com

Devoir Surveillé n°6 Correction

Première ES/L

Probabilités, dérivation et suites

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Exercice 1. 5 points

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher. Deux portent le n°1, trois portent le n°2, quatre portent le n°3, une porte le n°4. Soit le jeu suivant : on gagne 100 euros si le numéro sorti est 1 ou un 2; et 60 euros si c'est un 3; on perd 700 euro si c'est un 4. On définit alors la variable aléatoire X qui correspond au gain (ou perte) du joueur sur l'univers Ω .

1. **Décrire l'univers et l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.**
On définit alors la variable aléatoire X sur Ω qui correspond au gain (ou perte). La v.a. X associe :

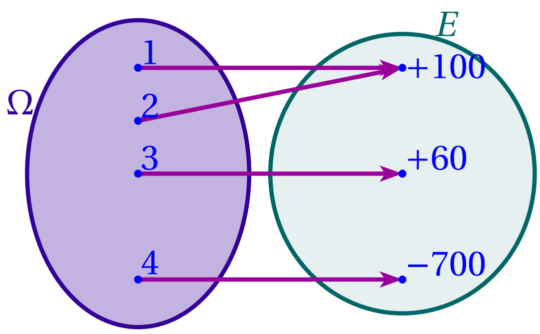
   - 100 à l'issue ou évènement élémentaire $\{1\}$;
   - 100 à l'issue ou évènement élémentaire $\{2\}$;
   - 60 à l'issue ou évènement élémentaire $\{3\}$;
   - et -700 à l'issue ou évènement élémentaire $\{4\}$.

   L'ensemble des valeurs prises par X est donc $F = \{-700 ; 60 ; 100\}$ alors que l'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. L'univers associé est alors
$$\Omega = \{e_1 = 1 ; e_2 = 2 ; e_3 = 3 ; e_4 = 4\}$$

2. **Décrire par une phrase l'évènement « $X = +60$ » et calculer sa probabilité.**

   - L'évènement « $X = +60$ » est l'évènement : « *le joueur a gagné 60 euro* » , il correspond donc à l' évènement élémentaire $\{3\}$.
   - Par ailleurs il y a 4 boules qui portent le n° 3 sur un total de 10 boules. On considérant l'équiprobabilité des tirages on a alors :
$$p(e_3) = \frac{4}{10} = 0,4$$
On a donc :
$$P(X = +60) = \underline{0,4}$$

3. **Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.**



   - Il y a deux boules qui portent le n°1 sur 10, donc en supposant que chaque boule à la même chance d'être tirée on a :
$$p(e_1) = \frac{2}{10} = 0,2$$
On obtient de la même façon :
$$P(e_2) = \frac{3}{10} = 0,3 \; ; \; P(e_3) = \frac{4}{10} = 0,4 \; ; \; P(e_4) = \frac{1}{10} = 0,1$$

- La loi de probabilité des issues correspondantes est décrite par le tableau :

e_i	1	2	3	4	Total
$P(e_i)$	0,2	0,2	0,4	0,1	1

- La loi de probabilité de X est décrite par le tableau :

x_i	-700	60	100	Total
$P(X = x_i)$	$p(e_4) = 0,1$	$p(e_3) = 0,4$	$p(e_1) + p(e_2) = 0,5$	1

4. **Décrire par une phrase l'évènement « $X \geq +60$ » et calculer sa probabilité.**
L'évènement « $X \geq +60$ » est l'évènement : « *le joueur a gagné 60 euro ou plus* » , il correspond donc à l' évènement $\{1 ; 2 ; 3\}$.
La probabilité de l'évènement « $X \geq +5$ » est celle de l' évènement $\{1 ; 2 ; 3\}$ on a donc :

$$P(X \geq +5) = 0,4 + 0,5 = \underline{0,9}$$

5. **Donner l'espérance de la variable aléatoire X.**
Donc l'espérance est :

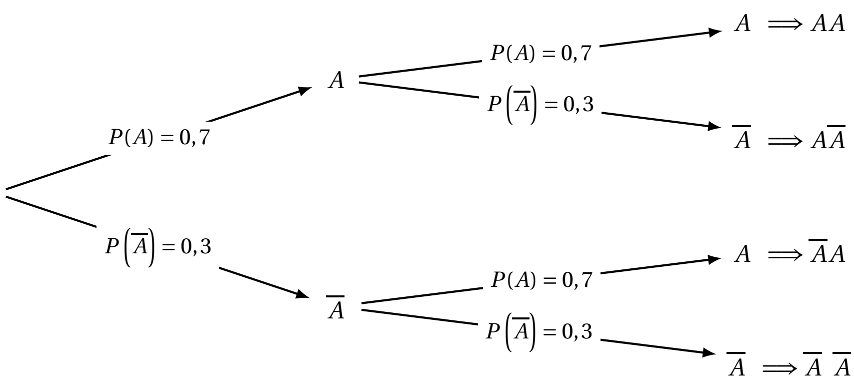
$$\boxed{E(X) = -7000 \times 0,1 + 60 \times 0,4 + 100 \times 0,5 = \underline{4}}$$

Cela signifie que le gain moyen au jeu est de 4 euros. Le jeu est plus qu' équitable.

Exercice 2. Le grand restaurant 5 points

Une société de sondage interroge des clients d'un restaurant. On note A l'évènement « la personne interrogée est satisfaite du repas ». La probabilité $P(A)$ qu'une personne soit satisfaite du repas est de 0,7. On interroge deux consommateurs au hasard et de façon indépendante.

1. **Compléter sur cette feuille l'arbre ci-dessous**.
On résume les données dans un arbre pondéré.
On note par exemple AA ou $(A ; A)$ l'évènement : « *la première et la deuxième personne sont satisfaites* »



2. **Calculer la probabilité qu'ils soient tous deux satisfaits du site.**
La probabilité qu'ils soient tous deux satisfaits du site est la probabilité de la liste (ou chemin) AA. D'après le cours, elle est égale au produit des probabilités figurant sur ses branches soit :

$$P(AA) = 0,7 \times 0,7 = \underline{0,49}$$

3. **Calculer la probabilité qu'au moins un des deux soit satisfaits du site.**

- <u>Méthode 1</u>
La probabilité qu'au moins un des deux soit satisfaits du site est celle de l'évènement
$B =$ « $\left\{A\overline{A} ; \overline{A}A ; AA\right\}$ ». On a donc d'après le cours :

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(A\,\overline{A}\right) + P\left(\overline{A}A\right) + P(AA) \\ &= 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,3 + 0,49 \\ P(B) &= \underline{0,91} \end{aligned}$$

- Méthode 2
  L'évènement contraire de l'évènement « *au moins un des deux soit satisfaits du site* » est celle de l'évènement « *aucune n'est satisfaite du site* ». On a donc d'après le cours :

$$\begin{aligned} P(B) &= 1 - P\left(\overline{A}\ \overline{A}\right) \\ &= 1 - 0,3 \times 0,3 \\ P(B) &= \underline{0,91} \end{aligned}$$

Exercice 3. Deux suites 5 points

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par, pour tout entier naturel n

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 10 \\ u_{n+1} & = & u_n + 0,4 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 8 \\ v_{n+1} & = & 1,028 v_n \end{array}\right.$$

1.

1. a. Parmi ces deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle est géométrique ; donner leurs raisons respectives.

- La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 0,4$ car sa relation de récurrence s'exprime, pour n entier sous la forme, :
$$u_{n+1} = u_n + r \text{ avec } r = 0,4$$
- La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,028$ car sa relation de récurrence s'exprime, pour n entier sous la forme, :
$$v_{n+1} = q \times v_n \text{ avec } q = 1,028$$

1. b. Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n.

- La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 0,4$ et de premier terme $u_0 = 10$ donc son terme général est, pour n entier :
$$u_n = u_0 + nr = \underline{10 + 0,4n}$$
- La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1,028$ et de premier terme $v_0 = 8$ donc son terme général est, pour n entier :
$$v_n = u_0 \times q^n = \underline{8 \times 1,028^n}$$

1. c. Calculer pour les deux suites les 4 termes de rangs 1, 2, 45 et 46. On pourra donner les résultats arrondis au centième dans un tableau sans détailler les calculs.

n	1	2	45	46
u_n	10.4	10.8	28	28.4
v_n	8.224	8.45	27.7	28.5

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel n est un entier naturel, et U et V sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang n des suites (u_n) et (v_n) :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U > V
    U ← U + 0,4
    V ← V × 1,028
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

On sait que les deux suites sont strictement croissantes. Que donne en sortie cet algorithme ? Interpréter ce résultat.
Cet algorithme détermine le premier rang n pour lequel $u_n \leq v_n$.
D'après la question (1.c.) on sait que <u>la valeur de sortie est $n = 46$</u>.

Exercice 4. Dérivation 5 points

On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \dfrac{1-3x}{2+x^2}$.

1. **Montrer que la fonction dérivée de k sur $\mathbb{R}$ est : $k'(x) = \dfrac{3x^2-2x-6}{\left(2+x^2\right)^2}$.**

   La fonction k est définie et dérivable surl'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 1-3x$	$u'(x) = -3$
$v(x) = 2+x^2$	$v'(x) = 2x$

   Pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

$$k(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$k(x) = \frac{-3\times\left(2+x^2\right) - (1-3x)\times(2x)}{\left(2+x^2\right)^2}$$
$$k(x) = \frac{-6-3x^2-2x+6x^2}{\left(2+x^2\right)^2}$$

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}}\ ;\ \boxed{k'(x) = \frac{3x^2-2x-6}{\left(2+x^2\right)^2}}$$

2. **Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 0.**
   L'équation de la tangente (T) á la courbe $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse $a = 0$ est $(T)\ :\ y = k'(a)(x-a)+k(a)$.
   Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} k(0) & = +\dfrac{1}{2} \\ k'(0) & = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow (T)\ :\ y = -\frac{3}{2}\times(x-0)\ +\frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}$$

3. **Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_k$ qui admettent une tangente horizontale.**
   Les abscisses des points de $\mathscr{C}_k$ qui admettent une tangente horizontale sont les solutions de l'équation $k'(x) = 0$. Or

$$k'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2-2x-6 = 0$$

   L'expression $\left(3x^2\ -2x\ -6\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -2 \\ c = -6 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 76 > 0$$

   Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(3x^2\ -2x\ -6\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{76}}{6} = -1.12 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{76}}{6} \approx 1.79$$

Fin du devoir