Math93.com

Devoir Surveillé n°6

Première ES/L

Probabilités, dérivation et suites

Durée 1 heure - Coeff. 5

Noté sur 20 points

L'usage de la calculatrice est autorisé.

BARÈME (sur 20 points)				Note
Exercice 1	:	5	points	
Exercice 2	:	5	points	
Exercice 3	:	5	points	
Exercice 4	:	5	points	
			Total	

Exercice 1. 5 points

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher. Deux portent le n°1, trois portent le n°2, quatre portent le n°3, une porte le n°4. Soit le jeu suivant :

- on gagne 100 euros si le numéro sorti est 1 ou un 2 ;
- et 60 euros si c'est un 3 ;
- on perd 700 euro si c'est un 4.

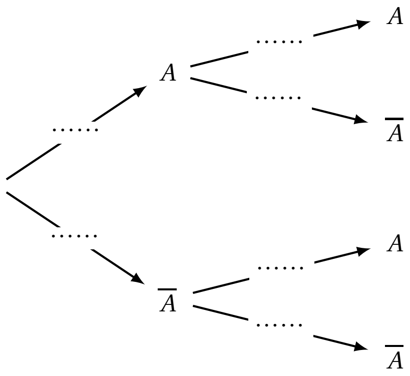
On définit alors la variable aléatoire X qui correspond au gain (ou perte) du joueur sur l'univers Ω .

1. Décrire l'univers et l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
2. Décrire par une phrase l'évènement « $X = +60$ » et calculer sa probabilité.
3. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
4. Décrire par une phrase l'évènement « $X \geq +60$ » et calculer sa probabilité.
5. Donner l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

Exercice 2. Le grand restaurant 5 points

Une société de sondage interroge des clients d'un restaurant. On note A l'évènement « la personne interrogée est satisfaite du repas ». La probabilité $P(A)$ qu'une personne soit satisfaite du repas est de 0,7. On interroge deux clients au hasard et de façon indépendante.

1. Compléter sur cette feuille l'arbre ci-dessous.
   On note par exemple AA ou $(A\ ;\ A)$ l'évènement : « *la première et la deuxième personne sont satisfaites* »



2. Calculer la probabilité qu'ils soient tous deux satisfaits du repas.
3. Calculer la probabilité qu'au moins un des deux soit satisfaits du repas.
4. On interroge maintenant **5 clients consécutivement**.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre de clients satisfaits.

   Calculer $P(X = 0)$ et $P(X = 5)$.

Exercice 3. Deux suites 5 points

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par, pour tout entier naturel n

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 10 \\ u_{n+1} & = & u_n + 0,4 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 8 \\ v_{n+1} & = & 1,028\,v_n \end{array}\right.$$

1.

1. a. Parmi ces deux suites, préciser laquelle est arithmétique et laquelle est géométrique ; donner leurs raisons respectives.

1. b. Exprimer u_n et v_n en fonction de l'entier naturel n.

1. c. Calculer pour les deux suites les 4 termes de rangs 1, 2, 45 et 46. On pourra donner les résultats arrondis au centième dans un tableau sans détailler les calculs.

2. On donne l'algorithme suivant dans lequel n est un entier naturel, et U et V sont des réels qui désignent respectivement les termes de rang n des suites (u_n) et (v_n) :

```
n ← 0
U ← 10
V ← 8
Tant que U > V
    U ← U + 0,4
    V ← V × 1,028
    n ← n + 1
Fin Tant que
```

On sait que les deux suites sont strictement croissantes. Que donne en sortie cet algorithme ?

Interpréter ce résultat.

3. En 1798, l'économiste anglais Thomas Malthus publie « An essay on the principle of population » dans lequel il émet l'hypothèse que l'accroissement de la population, beaucoup plus rapide que celui des ressources alimentaires, conduira son pays à la famine. Il écrit :

> « *Nous pouvons donc tenir pour certain que, lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle va doublant tous les vingt-cinq ans, et croît de période en période selon une progression géométrique. [...] Nous sommes donc en état de prononcer, en partant de l'état actuel de la terre habitée, que les moyens de subsistance, dans les circonstances les plus favorables de l'industrie, ne peuvent jamais augmenter plus rapidement que selon une progression arithmétique.* »

En 1800, la population de l'Angleterre était estimée à 8 millions d'habitants et l'agriculture anglaise pouvait nourrir 10 millions de personnes. Le modèle de Malthus admet que la population augmente de 2,8 % chaque année et que les progrès de l'agriculture permettent de nourrir 0,4 million de personnes de plus chaque année.

On utilisera ce modèle pour répondre aux questions suivantes.

3. a. À partir de quelle année la population de l'Angleterre serait -elle devenue trop grande pour ne plus être suffisamment nourrie par son agriculture ?

Exercice 4. Dérivation 5 points

On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par

$$k(x) = \frac{1-3x}{2+x^2}$$

1. Montrer que la fonction dérivée de k sur $\mathbb{R}$ est :

$$k'(x) = \frac{3x^2-2x-6}{\left(2+x^2\right)^2}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 0.

3. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_k$ qui admettent une tangente horizontale.

Fin du devoir