Math93.com

Devoir Surveillé n°2A (Correction)

1re Maths ENS

Second degré et suites

Durée 50 min - Coeff. 1

Noté sur 20 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Le second degré — 8 points

Soit f la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 6x - 20$$

1. Déterminer les racines de la fonctions f.

Corrigé (4 pts)

L'expression $\left(2x^2 - 6x - 20\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -6 \\ c = -20 \end{array}\right. \Bigg| \implies \Delta = 196 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(2x^2 - 6x - 20\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{196}}{4} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{196}}{4} = 5$$

2. Établir le tableau de signe de $f(x)$.

Corrigé (3 pts)

Puisque le coefficient $a = 2 > 0$, l'expression $f(x)$ est du signe de a soit positive à l'extérieur des racines (-2) et 5 et négative entre.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
signe de $f(x) = 2x^2 - 6x - 20$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. En déduire l'intervalle solution de l'inéquation :

$$f(x) \leqslant 0$$

Corrigé

D'après la question précédente :

$$\boxed{f(x) \leqslant 0 \iff x \in [-2\ ;\ 5]}$$

4. *[Bonus] Quel est (sans calcul) le signe de* $f\left(5+\pi\sqrt{2}\right)$ *?*

Corrigé

Puisque $\left(5+\pi\sqrt{2}\right) > 5$, d'après le tableau de signe de la question 2) on a :

$$\boxed{f\left(5+\pi\sqrt{2}\right) > 0}$$

x	$-\infty$		-2		5		$\left(5+\pi\sqrt{2}\right)$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	

Exercice 2. Modélisation — 4 points

« La population initiale d'une ville est de 10 000 habitants en 2023. Chaque année, 80% des habitants restent et 500 nouvelles personnes arrivent. »

1. Calculer la population en 2024.

Corrigé

Puisque chaque année, 80% des habitants restent et 500 nouvelles personnes arrivent et qu'il y avait 10 000 personnes en 2023, on aura en 2024 :

$$\boxed{10\,000 \times \frac{80}{100} + 500 = \underline{8\,500}}$$

2. Modéliser cette situation par une suite en précisant son premier terme u_0 et une relation de récurrence pour définir le terme général.

Corrigé

La suite u est définie pour n entier par :

$$\begin{cases} u_0 = 10\,000 \\ u_{n+1} = 80\% u_n + 500 = 0,8 u_n + 500 \end{cases}$$

Exercice 3. Calculons des termes de la suite — 4 points

Soit u_n la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 5u_n - 3$$

Calculer u_1, u_2 et u_3.

Corrigé

La suite u est définie pour $n \geqslant 0$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n - 3 \end{cases}$$

- On remplace n par 0 dans la formule de récurrence pour calculer u_1 :

$$\begin{aligned} u_{0+1} &= 5u_0 - 3 \\ u_1 &= 5 \times 2 - 3 \\ \boxed{u_1 = 7} \end{aligned}$$

- On remplace n par 1 dans la formule de récurrence pour calculer u_2 :

$$\begin{aligned} u_{1+1} &= 5u_1 - 3 \\ u_2 &= 5 \times 7 - 3 \\ \boxed{u_2 = 32} \end{aligned}$$

- On remplace n par 2 dans la formule de récurrence pour calculer u_3 :

$$\begin{aligned} u_{2+1} &= 5u_2 - 3 \\ u_3 &= 5 \times 32 - 3 \\ \boxed{u_3 = 157} \end{aligned}$$

Exercice 4. Calculons des termes de la suite 4 points

Calculer les 3 premiers termes de la suite suivante définie pour tout entier n par :

$$v_n = 500 \times 0,8^n + 50$$

Corrigé

La suite v est définie de façon explicite, comme une fonction, de ce fait le calcul des images est simple :

- On remplace n par 0 dans la formule de récurrence pour calculer v_0 :

$$v_0 = 500 \times 0,8^0 + 50$$
$$v_0 = 500 \times 1 + 50$$
$$\boxed{v_0 = 550}$$

- On remplace n par 1 dans la formule de récurrence pour calculer v_1 :

$$v_1 = 500 \times 0,8^1 + 50$$
$$v_1 = 500 \times 0,8 + 50$$
$$\boxed{v_1 = 450}$$

- On remplace n par 2 dans la formule de récurrence pour calculer v_2 :

$$v_2 = 500 \times 0,8^2 + 50$$
$$\boxed{v_2 = 370}$$

↫ **Fin du devoir** ↬