Math93.com

Devoir Surveillé n°3A (Correction)

1re Maths ENS

Second degré

Durée 25 min - Coeff. 0.5

Noté sur 20 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Une suite arithmético-géométrique — 20 points

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 &= 50 \\ a_{n+1} &= 2 \times a_n + 100 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n &= a_n + 100 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.
2. Démontrer que la suite (b_n) est géométrique.
3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer (b_n) en fonction de n.
4. Démontrer que pour tout entier n on a :

$$a_n = 150 \times (2)^n - 100 .$$

Corrigé

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 &= 50 \\ a_{n+1} &= 2 \times a_n + 100 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n &= a_n + 100 \end{cases}$$

1. **Calculer les trois premiers termes des deux suites.**

$$a_0 = 50 \ ; \ a_1 = 200 \ ; \ a_2 = 500 \quad \text{et} \quad b_0 = 150 \ ; \ b_1 = 300 \ ; \ b_2 = 600$$

2. **Démontrer que la suite b est géométrique.**

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} + 100 \\ b_{n+1} &= (2\,a_n + 100) + 100 \\ b_{n+1} &= 2 \times a_n + 200 \\ b_{n+1} &= 2 \times \left(a_n + \frac{200}{2}\right) \\ b_{n+1} &= 2 \times (a_n + 100) \\ b_{n+1} &= 2 \times b_n \end{aligned}$$

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 2$, et de premier terme $b_0 = 150$ puisque :

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 + 100 \\ b_0 &= 50 + 100 \\ b_0 &= 150 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(b_n) : \begin{cases} b_0 & = 150 \\ b_{n+1} & = 2 \times b_n \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer b_n en fonction de n.

La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 2$, et de premier terme $b_0 = 150$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} ;\ b_n = b_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ b_n = 150 \times (2)^n}$$

4. Démontrer que pour tout entier n on a : $a_n = 150 \times (2)^n - 100$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$b_n = a_n + 100$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = b_n - 100$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} ;\ a_n = 150 \times (2)^n - 100}$$