Math93.com

Devoir Surveillé n°5A (Correction)

1re Maths ENS

Dérivation

Durée 50 min - Coeff. 1

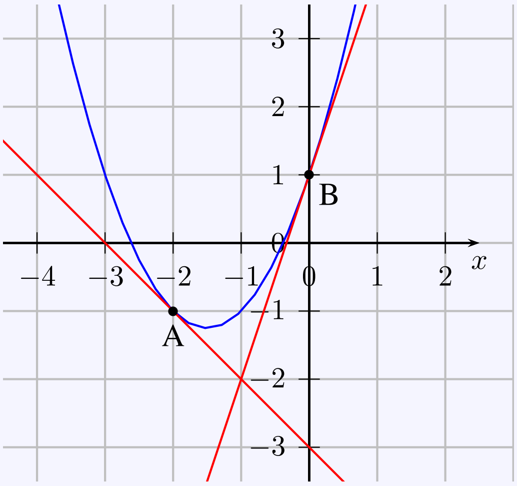
Noté sur 20 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Lecture graphique puis calculs — 10 points

A compléter sur cette feuille

On a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 0.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(-2) = -1$$

2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-2\,;\,-1)$:

$$y = -x - 3$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = 3$$

4. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $B(0\,;\,1)$:

$$y = 3x + 1$$

5. f est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 3x + 1$$

Déterminer la fonction dérivée de f.

Corrigé

Pour tout réel x on a :

$$f'(x) = 2x + 3$$

6. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au points A d'abscisse (-2).

Corrigé

- On a

$$\begin{cases} f'(-2) = 2 \times (-2) + 3 = -1 \\ f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1 \end{cases}$$

- L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a=-2$ est

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & =-2 \\ f(-2) & =-1 \\ f'(-2) & =-1 \end{array}\right| \Rightarrow (T)\ :\ y=-1\times(x+2)\ -1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y=-x-3}$$

7. Déterminer par le calcul l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au points B d'abscisse 0.

Corrigé

- On a

$$\begin{cases} f'(0)=2\times 0+3=3 \\ f(0)=0^2+3\times 0+1=1 \end{cases}$$

- L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a=0$ est

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & =0 \\ f(0) & =+1 \\ f'(0) & =3 \end{array}\right| \Rightarrow (T)\ :\ y=3\times(x-0)\ +1 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{y=3x+1}$$

8. Déterminer l'abscisse du point de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui admet une tangente horizontale.

Corrigé

Les tangentes horizontales sont de coefficient directeur 0 donc il faut résoudre l'équation $f'(x)=0$.

$$f'(x)=0 \iff 2x+3=0 \iff x=-\frac{3}{2}$$

↩ Tournez la page . . .

Exercice 2. Dérivation et tangentes horizontales — 10 points

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

1. Calculer la dérivée de g.

Corrigé

Pour tout réel x par :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2(x^3)' + 3(x^2)' - 36(x)' \\ &= 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 36 \times 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{g'(x) = 6x^2 + 6x - 36}$$

2. Montrer que :

$$g'(x) = (6x - 12)(x + 3)$$

Corrigé

Pour tout réel x par :

$$\begin{aligned} (6x - 12)(x + 3) &= 6x^2 + 18x - 12x - 36 \\ &= 6x^2 + 6x - 36 \\ &= g'(x) \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression calculée dans la question 1) donc :

$$\boxed{g'(x) = (6x - 12)(x + 3)}$$

3. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale.

Corrigé

Les tangentes horizontales sont de coefficient directeur 0 donc il faut résoudre l'équation $f'(x) = 0$.
Or on a :

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 \text{ ou } f'(x) = (6x - 12)(x + 3)$$

On a deux possibilités, soit on utilise la première expression et le cours sur le second degré, soit la deuxième qui est faisable en 3e (EPN).

- <u>1re Solution</u> : avec $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$.

  L'équation $6x^2 + \ 6x \ -36 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 6 \\ b = 6 \\ c = -36 \end{array} \right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 900 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{900}}{12} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+\sqrt{900}}{12} = 2$$

- 2e Solution : avec $f'(x) = (6x-12)(x+3)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (6x-12)(x+3) = 0 \\ &\iff 6x-12 = 0 \text{ ou } x+3 = 0 \\ &\iff \underline{x = 2 \text{ ou } x = -3} \end{aligned}$$

Donc il y a deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 1 et 3.

4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse (-2).

Corrigé

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $a = -2$ est

$$y = g'(a)(x-a) + g(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = -2 \\ g(-2) & = +68 \\ g'(-2) & = -24 \end{array}\right| \Rightarrow \ (T) \ : \ y = -24 \times (x+2) \ + 68 \implies \boxed{y = -24x + 20}$$

5. On a tracé ci-dessous la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de la fonction g.
Tracer sur le graphe ci-dessous la tangente au point d'abscisse (-2) ainsi que les tangentes horizontales :

A compléter sur cette feuille

Fin du devoir