Math93.com

Devoir Surveillé n°6B (Correction)

1re Maths ENS

Dérivation 2 / Étude de fonctions

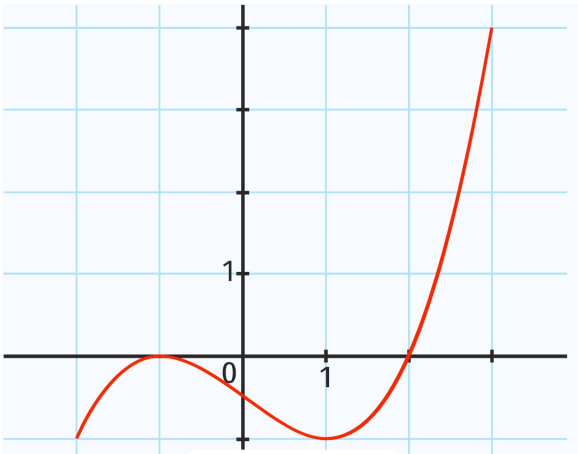
Durée 50 min - Coeff. 1

Noté sur 20 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. D'après la courbe de la dérivée — 4 points

h est une fonction définie et dérivable sur $I = [-2\ ;\ 3]$. La courbe ci-dessous représente la fonction dérivée h' de h sur I.



1. Dresser le tableau de variations de h sur I.

Corrigé

x	-2		-1		2		3
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
Variations de h		↘		↘		↗	

2. Donner les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_h$ qui admettent une tangente horizontale.

Corrigé

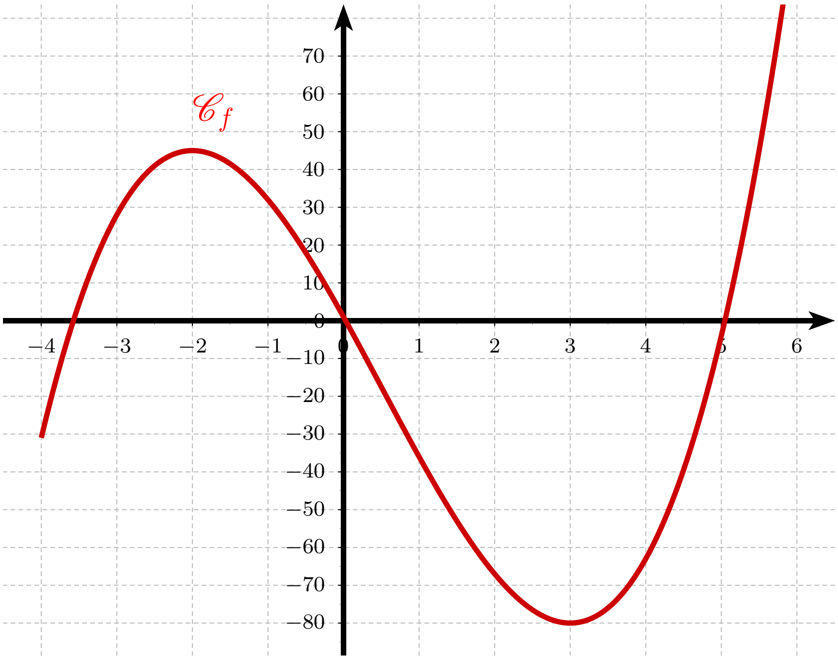
Les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_h$ qui admettent une tangente horizontale sont (-1) et 2 car la dérivée s'annule en ces points.

Exercice 2. Étude de fonction 12 points

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;\,6]$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$$

On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.



1. Déterminer la dérivée de f.

Corrigé

La fonction f est dérivable sur $[-4\,;\,6]$ et pour tout réel x de $[-4\,;\,6]$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x^3)' - 3(x^2)' - 36(x)' + (1)' \\ &= 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 36 \times 1 + 0 \\ &= \underline{6x^2 - 6x - 36} \end{aligned}$$

2. Montrer que pour tout réel x de $[-4\,;\,6]$ on a :

$$f'(x) = (6x + 12)(x - 3)$$

Corrigé

Pour tout réel x de $[-4\,;\,6]$ on a :

$$\begin{aligned} (6x + 12)(x - 3) &= 6x^2 - 18x + 12x - 36 \\ &= 6x^2 - 6x - 36 \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

3. Étudier les variations de f sur $[-4\,;\,6]$.

Faire un tableau de variations en précisant les valeurs des images.

Corrigé

On a montré que $f'(x) = (6x+12)(x-3)$ donc on étudie le signe de chaque facteur :

- $(6x+12) = 0 \iff x = -2$;
- $(x-3) = 0 \iff x = 3$;

x	-4		-2		3		6
Signe de $(6x+12)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-80	$\nearrow$	45	$\searrow$	-80	$\nearrow$	109

4. Donner les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale.

Corrigé

Les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale sont (-2) et 3 car la dérivée s'annule en ces points.

5. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α sur $[-4\ ;\ -2]$ et une solution β sur $[-2\ ;\ 3]$.
Démontrer qu'elle admet une unique solution γ sur l'intervalle $[3\ ;\ 6]$.

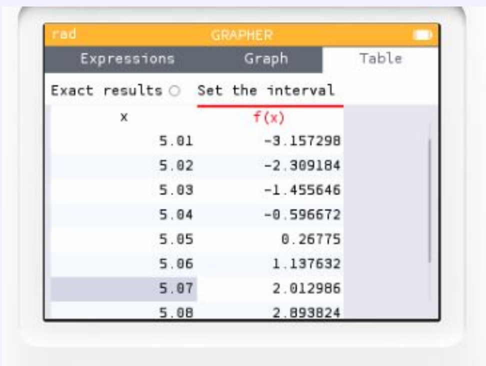
Corrigé

- Sur $[3\ ;\ 6]$ f est croissante et passe de (-80) à 109 donc elle passe nécessairement par 0 (si elle est continue) pour une valeur $x = \gamma \in]3\ ;\ 6[$.

6. Donner un encadrement à $0,01$ près de γ par balayage avec la calculatrice et en expliquant.

Corrigé

La calculatrice donne :



$$\begin{cases} f(5,04) \approx -0,59 < 0 \\ f(5,05) \approx 0,26 > 0 \end{cases} \implies \boxed{5,04 < \gamma < 5,05}$$

7. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

Corrigé

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -36 \end{cases} \implies \boxed{y = -36x + 1}$$

Exercice 3. Étude de fonction — 4 points

Étudier les variations de la fonction f définie sur $[-5\,;\,5]$ par

$$f(x) = -x^2 + 3x + 1$$

Vous dresserez un tableau de variations en faisant figurer les images.

Corrigé

La fonction est dérivable sur $[-5\,;\,5]$ et pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = -2x + 3$$

Alors

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$

On obtient alors :

x	-5		$\frac{3}{2}$		5
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	-39	$\nearrow$	3.25	$\searrow$	-9

Fin du devoir