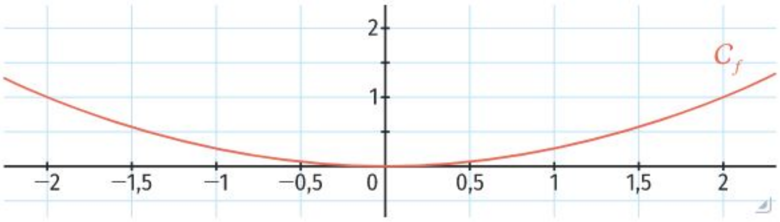
Math93.com

TD 1 - 1re ENS
Variation instantanée : Dérivation

Partie I. Tracer Tangente à une courbe en un point

Exercice 1. Tracer une tangente

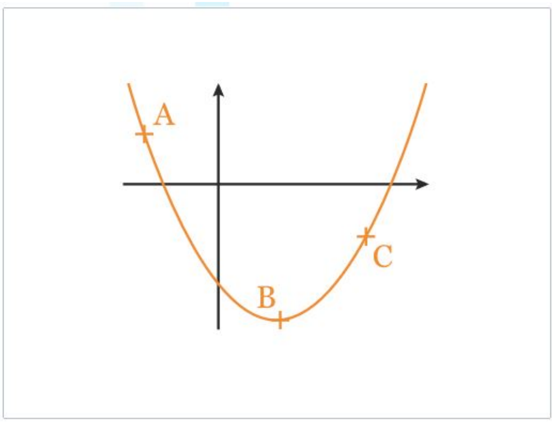
On considère la fonction f définie, pour tout réel x, par $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous.



Tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse -2 sachant que son coefficient directeur vaut -1.

Exercice 2.

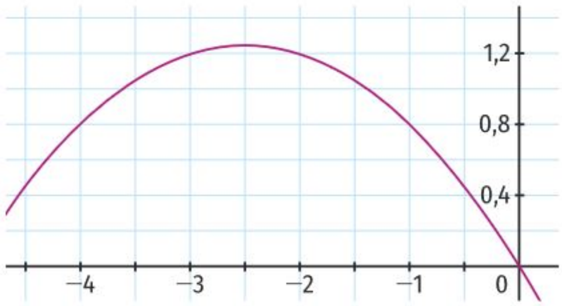
Tracer approximativement les tangentes à cette courbe aux points A, B et C.



Exercice 3.

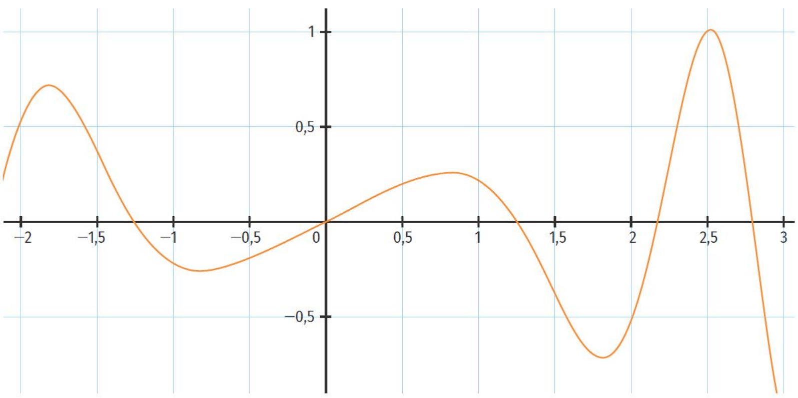
1. Tracer la tangente au point d'abscisse -3 sachant que son coefficient directeur vaut 0,2.

2. Tracer la tangente au point d'abscisse -1 sachant que son coefficient directeur vaut $-0,6$.



Exercice 4.

Tracer toutes les tangentes horizontales de la courbe.



Partie II. Déterminer graphiquement un nombre dérivé

Exercice 5.

Soit g la fonction définie, pour tout réel x, par

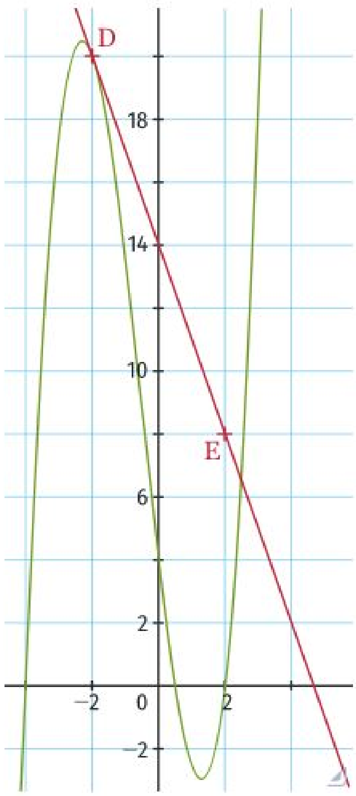
$$g(x) = x^3 + 1,5x^2 - 9x + 4$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique.

Soit $D(-2\ ;\ 20) \in \mathscr{C}_g$? et T la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point D.

On admet que T passe par $E(2\ ;\ 8)$.

Déterminer $g'(-2)$.

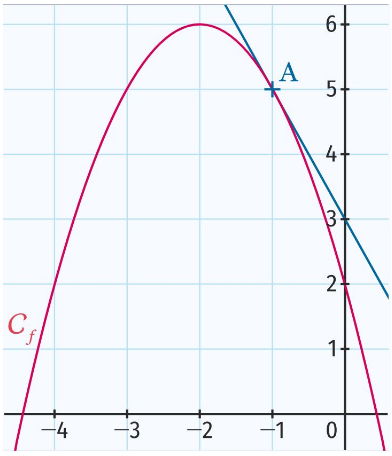


Exercice 6.

Si la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse a, quelle est la valeur de $f'(a)$? Justifier.

Exercice 7.

On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f et sa tangente au point A d'abscisse -1.

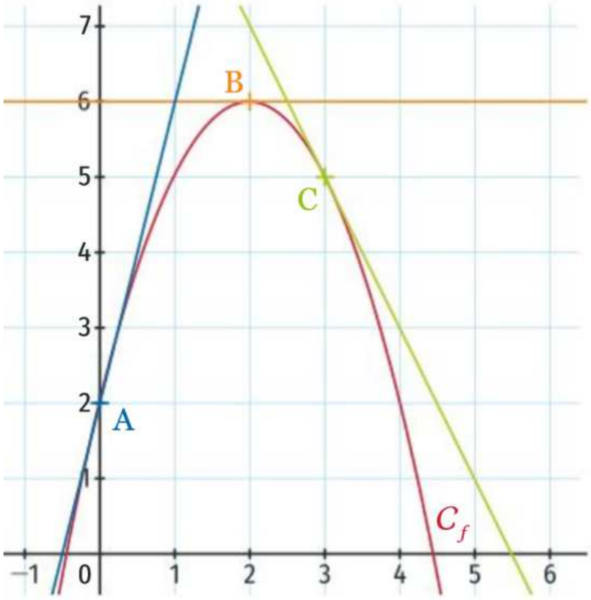


1. En utilisant les coordonnées de deux points, déterminer le coefficient directeur de cette tangente.

2. Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

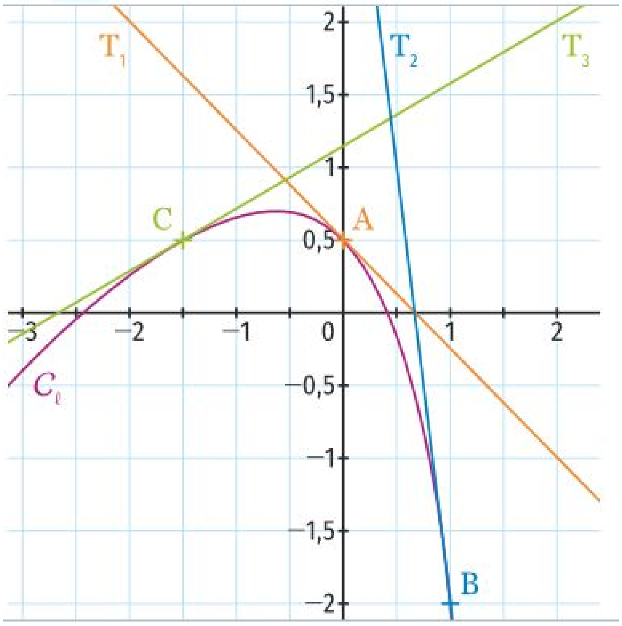
Exercice 8.

La courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. Les droites tracées sont les tangentes à $\mathscr{C}_f$ en A, en B et en C. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'(0)$, $f'(2)$ et $f'(3)$.



Exercice 9.

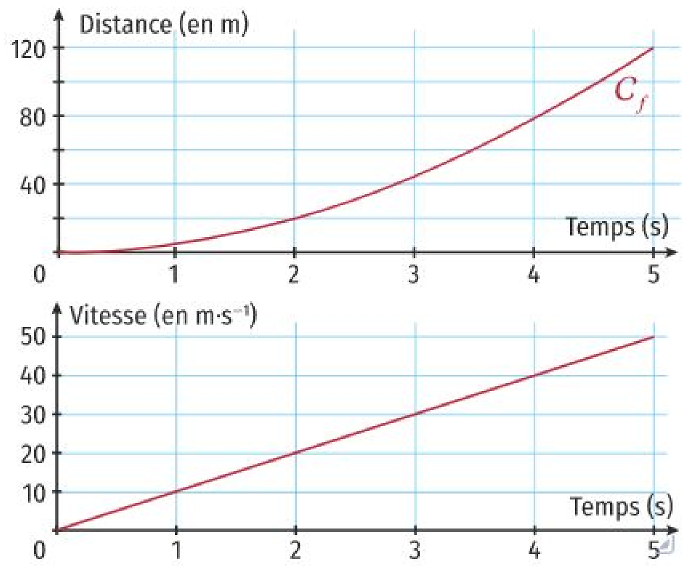
Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe représentative d'une fonction ℓ et trois de ses tangentes T_1, T_2 et T_3 respectivement aux points A, B et C.
Déterminer graphiquement $\ell'(0)$, $\ell'(1)$ et $\ell'(-1,5)$.



Partie III. Applications graphiques

Exercice 10.

En formule 1, la recherche des meilleures performances impose aux écuries d'utiliser les technologies les plus précises possibles pour déterminer la position, la vitesse et l'accélération de leur voiture durant la course.
On a mesuré et représenté les grandeurs caractéristiques sur les cinq premières secondes de la course d'un pilote en ligne droite.
La fonction donnant la distance parcourue par le pilote en fonction du temps est notée f.



1. Déterminer $f'(2)$ à l'aide du premier graphique.
2. Peut-on retrouver ce résultat à l'aide du graphique donnant la vitesse en chaque instant ?
3. Tracer la tangente à la courbe de la fonction vitesse en n'importe quel point. Qu'observe-t-on ?
4. Que peut-on en déduire concernant l'accélération du pilote ?
5. La vitesse s'exprime en m/s car elle représente une variation de la distance (exprimée en m) en fonction du temps (exprimé en s).
De la même manière, l'accélération représente une variation de la vitesse en fonction du temps. En quelle unité peut-on alors exprimer l'accélération ?
6. D'après le graphique, à combien est égale l'accélération du pilote pendant les cinq premières secondes ?

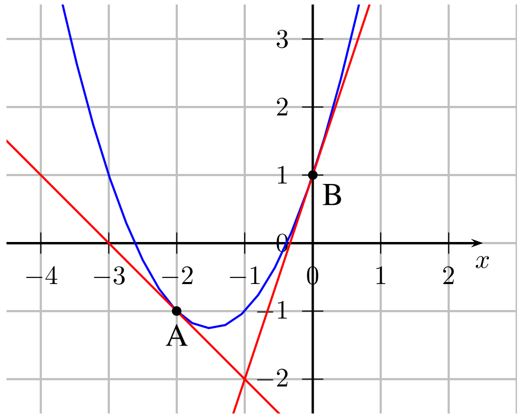
Remarque

Dans cette situation, il est courant de compter l'accélération en g. Un g vaut 9,81 m/s^2 et correspond à l'accélération de la pesanteur sur Terre. Ainsi, lorsque l'on dit qu'un pilote subit une accélération de 2g, cela signifie qu'il subit le double de l'accélération de la pesanteur sur Terre.

Partie IV. Déterminer par le calcul un nombre dérivé

Exercice 11. Lecture graphique puis calculs (c)

On a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 0. Lire les nombres dérivés $f'(-2)$ et $f'(0)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(-2) = \cdots\cdots$$

2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-2\,;\,-1)$:

$$y = \cdots\cdots$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = \cdots\cdots$$

4. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $B(0\,;\,1)$:

$$y = \cdots\cdots$$

5. f est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$.
Déterminer la fonction dérivée de f.

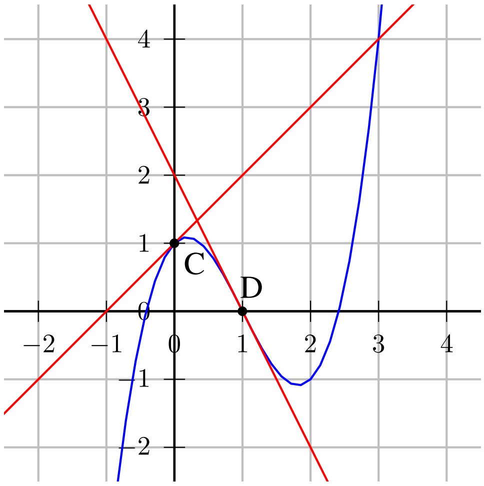
6. Retrouver les résultats des premières questions par le calcul.

7. La courbe représentative de f admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ? Si oui, donner une équation de chacune de ces tangentes.

8. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 par le calcul.

Exercice 12. Lecture graphique puis calculs (c)

On a tracé $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_g$ aux points C et D d'abscisses respectives 0 et 1. Lire les nombres dérivés $g'(0)$ et $g'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ aux points C et D.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(0) = \cdots\cdots$$

2. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $C(0\ ;\ 1)$:

$$y = \cdots\cdots$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(1) = \cdots\cdots$$

4. Équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $D(1\ ;\ 0)$:

$$y = \cdots\cdots$$

5. g est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$.
Déterminer la fonction dérivée de g.

6. Retrouver les résultats des premières questions par le calcul.

7. La courbe représentative de g admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ? Si oui, donner une équation de chacune de ces tangentes.

8. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse -3 par le calcul.

Exercice 13. Dérivation et tangentes horizontales

Soit g la fonction définie sur $[-10; 10]$ par

$$g(x) = 1,2x^2 - 6x - 1$$

1. Déterminer la fonction dérivée de g.

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1.

3. La courbe représentative de g admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ? Si oui, donner une équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 14. Dérivation et tangentes horizontales

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h \ : \ x \longmapsto x^3 - 300x + 2$$

1. Déterminer la fonction dérivée de h.

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse 1.

3. La courbe représentative de h admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ? Si oui, donner une équation de chacune de ces tangentes.

Exercice 15. Dérivation et tangentes horizontales

Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = 12x^3 - 30x^2 + 25x - 10$$

1. Calculer la dérivée de g.

2. Montrer que

$$g'(x) = (6x - 5)^2$$

3. Justifier que la courbe représentative de g admet une seule tangente horizontale et donner son équation réduite.

Exercice 16. Dérivation et tangentes horizontales

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

1. Calculer la dérivée de f.

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

3. Montrer que
$$f'(x) = (3x - 3)(x - 3)$$

4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale.

Partie V. Correction

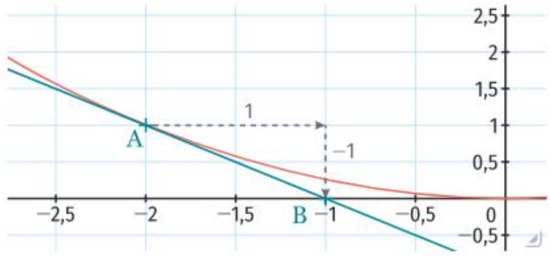
Correction de l'exercice 1

Méthode

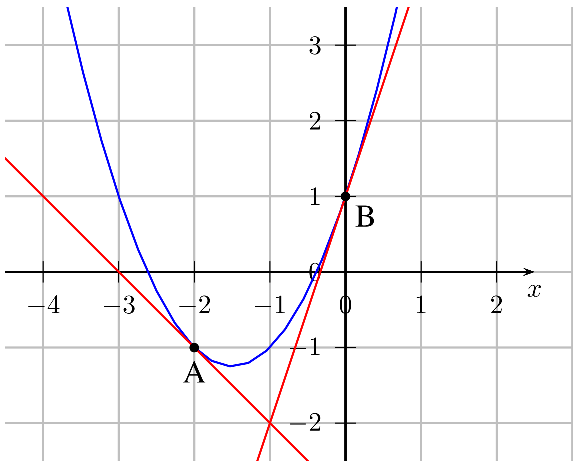
- On calcule l'ordonnée du point A pour le placer correctement.
- En partant de A, on se décale d'une unité en suivant l'axe des abscisses puis du coefficient directeur -1 en suivant l'axe des ordonnées. Le point d'arrivée est noté B.
- On trace la droite (AB) qui est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.

Solution

Le point A d'abscisse -2 appartient à $\mathcal{C}_f$ donc son ordonnée est $f(-2) = \dfrac{1}{4} \times (-2)^2 = 1$.



Correction de l'exercice 11



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(-2) = -1$$

2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-2\,;\,-1)$:

$$y = -x - 3$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = 3$$

4. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $B(0\,;\,1)$:

$$y = 3x + 1$$

5. f est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$.
Déterminer la fonction dérivée de f.

Corrigé

Pour tout réel x on a :

$$f'(x) = 2x + 3$$

6. Retrouver les résultats des premières questions par le calcul.

Corrigé

- On a

$$\begin{cases} f'(-2) = 2 \times (-2) + 3 = -1 \\ f(-2) = (-2)^2 + 3 \times (-2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1 \end{cases}$$

- L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = -2$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & = -2 \\ f(-2) & = -1 \\ f'(-2) & = -1 \end{array} \right| \Rightarrow \ (T)\ :\ y = -1 \times (x + 2)\ - 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = -x - 3}$$

- On a

$$\begin{cases} f'(0) = 2 \times 0 + 3 = 3 \\ f(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 1 = 1 \end{cases}$$

- L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a & = 0 \\ f(0) & = +1 \\ f'(0) & = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \ (T)\ :\ y = 3 \times (x - 0)\ + 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = 3x + 1}$$

7. La courbe représentative de f admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ? Si oui, donner une équation de chacune de ces tangentes.

Corrigé

Les tangentes horizontales sont de coefficient directeur 0 donc il faut résoudre l'équation $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \iff 2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$$

On calcul alors

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = -1,25$$

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = -\frac{3}{2}$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = -\frac{3}{2} \\ f\left(-\frac{3}{2}\right) & = -1,25 \\ f'\left(-\frac{3}{2}\right) & = 0 \end{array}\right| \Rightarrow (T) : y = 0 \times \left(x - \frac{3}{2}\right) - 1,25 \implies \boxed{y = -1,25}$$

8. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 par le calcul.

Corrigé

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = -3$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

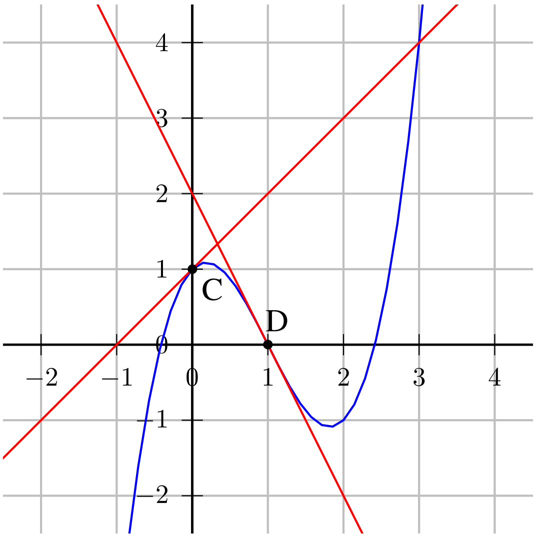
$$\left\{\begin{array}{ll} a & = -3 \\ f(-3) & = +1 \\ f'(-3) & = -3 \end{array}\right| \Rightarrow (T) : y = -3 \times (x+3) + 1 \implies \boxed{y = -3x - 8}$$

Réponses

$f'(-2) = -1$; $T_{-2} : y = -x - 3$

$f'(0) = 3$; $T_0 : y = 3x + 1$; $S\left(\frac{-3}{2} ; \frac{-5}{4}\right)$ *et* $T : y = -\frac{5}{4}$

Correction de l'exercice 12



1. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(0) = 1$$

2. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $C(0\ ;\ 1)$:

$$y = x + 1$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(1) = -2$$

4. Équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $D(1\ ;\ 0)$:

$$y = -2x + 2$$

5. g est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$.
Déterminer la fonction dérivée de g.

Corrigé

g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

6. Retrouver les résultats des premières questions par le calcul.

Corrigé

- $g'(0) = 3 \times 0^2 - 6 \times 0 + 1 = 1$;
- L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $a = 0$ est

$$y = g'(a)(x - a) + g(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = 0 \\ g(0) & = +1 \\ g'(0) & = 1 \end{array}\right| \Rightarrow \ (T)\ :\ y = 1 \times (x - 0)\ + 1 \ \Longrightarrow \ \boxed{y = x + 1}$$

- $g'(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 1 = -2$;
- L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $a = 1$ est

$$y = g'(a)(x - a) + g(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = 1 \\ g(1) & = +0 \\ g'(1) & = -2 \end{array}\right| \Rightarrow \ (T)\ :\ y = -2 \times (x - 1)\ + 0 \ \Longrightarrow \ \boxed{y = -2x + 2}$$

7. La courbe représentative de f admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ?

Corrigé

Les tangentes horizontales sont de coefficient directeur 0 donc il faut résoudre l'équation $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x + 1 = 0$$

L'équation $3x^2 - 6x + 1 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -6 \\ c = 1 \end{array}\right. \Bigg| \implies \Delta = 24 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{6 - \sqrt{24}}{6} \approx 0.2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 + \sqrt{24}}{6} \approx 1.8$$

Donc il y a deux tangentes horizontales.

8. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -3 par le calcul.

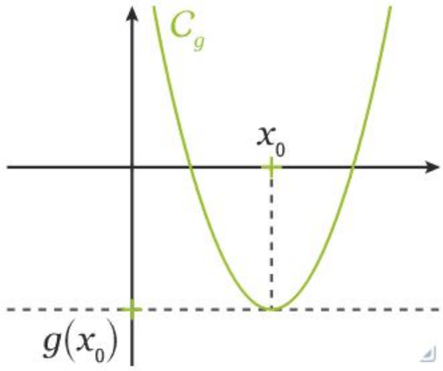
Corrigé

Réponses
$g'(0) = 1$; $T_0 \ : \ y = x + 1$
$g'(1) = -2$; $T_1 \ : \ y = -2x + 2$

Correction de l'exercice 13

Méthode

- Puisqu'on recherche une tangente horizontale en un point, alors le nombre dérivé en ce point est nul.
- On détermine l'expression de $g'(x)$.
- On résout l'équation $g'(x) = 0$.
- La solution x_0 obtenue est l'abscisse où la tangente à la courbe représentative de g est horizontale.
- On calcule $g(x_0)$:
  l'équation réduite de la tangente horizontale est donnée par $y = g(x_0)$.



Solution

Soit $x \in [-10; 10]$.
Il existe une tangente horizontale au point d'abscisse x si, et seulement si, $g'(x) = 0$.
Or, pour tout $x \in [-10; 10]$, $g'(x) = 1,2 \times 2x - 6 - 0 = 2,4x - 6$.
On a alors :

$$2,4x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2,4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{2.4} \Leftrightarrow x = 2,5.$$

Finalement, il existe une et une seule tangente horizontale, au point d'abscisse $2,5$.
Par ailleurs, $g(2,5) = 1,2 \times 2,5^2 - 6 \times 2,5 - 1 = -8,5$ donc l'équation réduite de cette tangente est $y = -8,5$.

Correction de l'exercice 16

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

1. Calculer la dérivée de f.

Corrigé

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme. Pour tout x réel :

$$f'(x) = \left(x^3\right)' - 6\left(x^2\right)' + 9\,(x)'$$

$$\boxed{f'(x) = 3x^2 - 12x + 9}$$

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Corrigé

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 2$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll|} a & = 2 \\ f(2) & = +2 \\ f'(2) & = -3 \end{array}\right. \Rightarrow \ (T)\ :\ y = -3\times(x-2)\ +2 \implies \boxed{y = -3x+8}$$

3. Montrer que

$$f'(x) = (3x-3)(x-3)$$

Corrigé

pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} (3x-3)(x-3) &= 3x^2 - 9x - 3x + 9 && (1)\\ &= \underline{3x^2 - 12x + 9} && (2) \end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression calculée dans la question 1) donc :

$$\boxed{f'(x) = 3(x-1)(x-3)}$$

4. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale.

Corrigé

Les tangentes horizontales sont de coefficient directeur 0 donc il faut résoudre l'équation $f'(x) = 0$. Or on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \ \text{ ou } \ f'(x) = (3x-3)(x-3)$$

On a deux possibilités, soit on utilise la première expression et le cours sur le second degré, soit la deuxième qui est faisable en 3e (EPN).

- <u>1re Solution</u> : avec $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

L'équation $3x^2 - 12x + 9 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -12 \\ c = 9 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 36 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{36}}{6} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12 + \sqrt{36}}{6} = 3$$

- 2e Solution : avec $f'(x) = (3x - 3)(x - 3)$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (3x-3)(x-3) = 0 \\ &\iff 3x - 3 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \\ &\iff \underline{x = 1 \text{ ou } x = 3} \end{aligned}$$

Donc il y a deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 1 et 3.