Math93.com

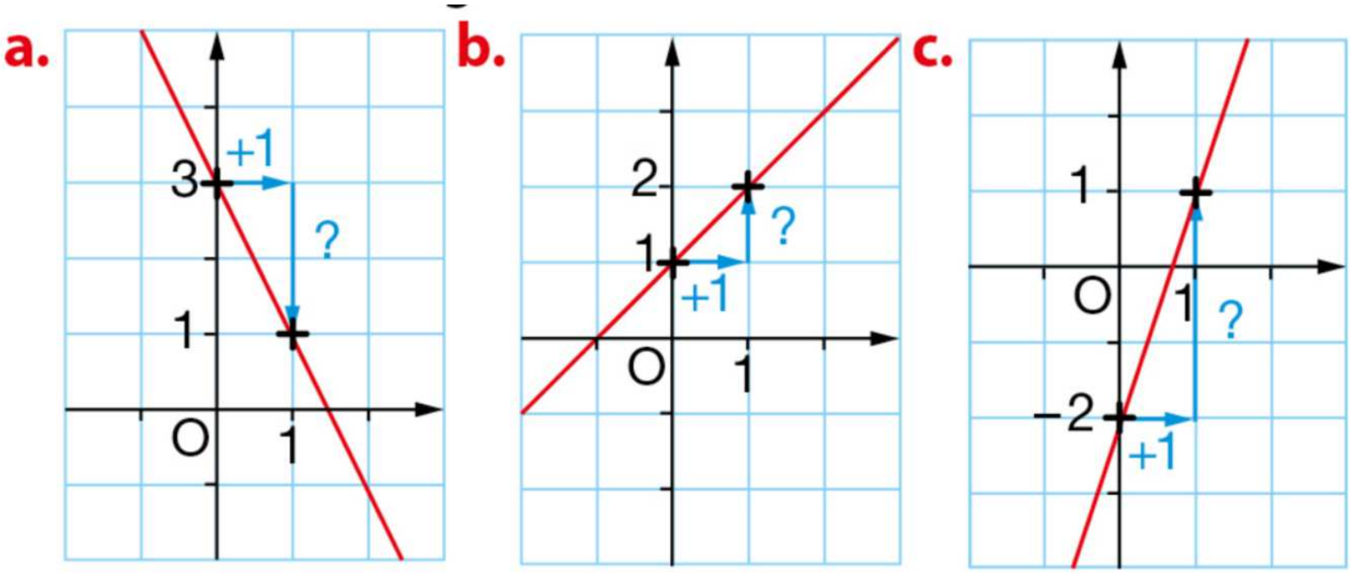
TD 1 - 1re ENS

Croissance linéaire : Fonctions affines et suites arithmétiques

Partie I. Fonctions affines

Exercice 1. Lectures graphiques (c)

Les droites ci-dessous sont les représentations graphiques des 3 fonctions affines, f, g et h.
Déterminer par lecture graphique les expressions de ces fonctions affines (lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur).



1. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (a).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

$$f(x) = \cdots\cdots\cdots$$

2. Soit g affine définie par $g(x) = mx + p$ représentée par la droite du schéma (b).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

$$g(x) = \cdots\cdots\cdots$$

3. Soit h la fonction affine définie par $h(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (c).
Par lecture graphique :

$$p = \cdots\cdots\cdots \quad \text{et} \quad m = \cdots\cdots\cdots$$

Donc

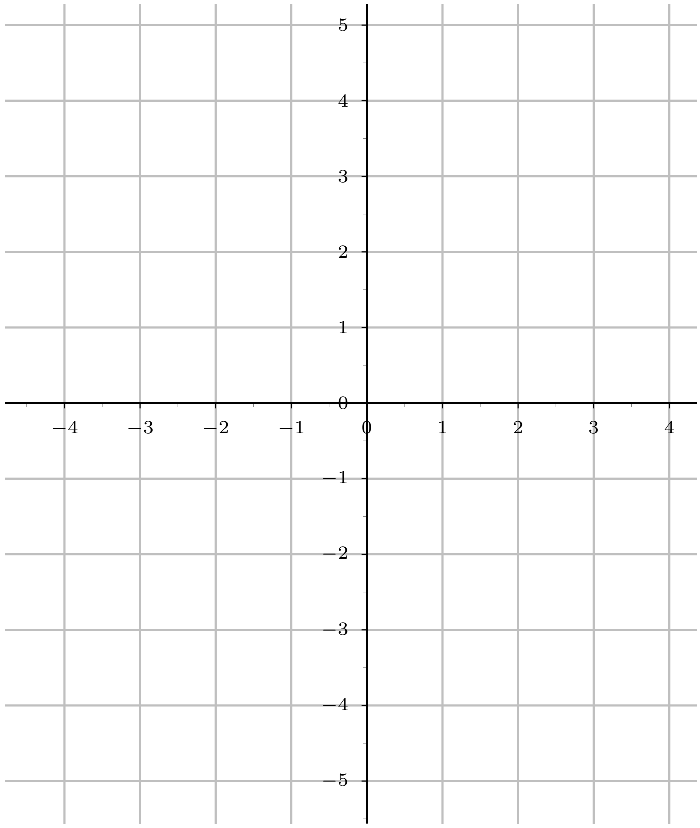
$$h(x) = \cdots\cdots\cdots$$

Exercice 2. Variations et tableau de signe (c)

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les droites (d) et (d') représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x + 2$.

x	......	......
$f(x) = 2x + 1$	......	......

x	......	......
$g(x) = -3x + 2$	......	......



2. Étude de la fonctions f.

2. a. Donner en justifiant rapidement, le tableau de variations de f. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f		

2. b. Donner en justifiant rapidement, le tableau de signes de f. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
Signe de $f(x) = 2x + 1$		0	

3. Étude de la fonctions g.

3. a. Donner en justifiant rapidement, le tableau de variations de g. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de g		

3. b. Donner en justifiant rapidement, le tableau de signes de g. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

x	$-\infty$	$\cdots$	$+\infty$
Signe de $g(x) = -3x + 2$		0	

Exercice 3. Comme dans le cours (c)

1. Déterminer la fonction affine f dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	1	4
$f(x)$	5	9

2. Déterminer la fonction affine g de courbe représentative la droite passant par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ -4)$.

Exercice 4. Kwyk, c'est ma passion

Faire le TD kwyk sur les fonctions affines.

Partie II. Applications

Exercice 5. Pression de l'eau

La pression de l'eau sur un plongeur se calcule à l'aide de la formule

$$P = \frac{F}{S}$$

où P est la pression, en pascal (Pa), F est la force de pression exercée, en newton (N) et S, la surface corporelle, en m^2.

1. La pression de l'eau définit-elle une croissance linéaire en fonction de F ou de S ? Justifier.

2. La surface corporelle moyenne d'un humain adulte est de 1,73 m^2.

2. a. Calculer la pression de l'eau sur un plongeur lorsque la force vaut 2,595 N.

2. b. Calculer la force de pression exercée sur un plongeur lorsque la pression est de 1 bar, soit 10^5 Pa.

Exercice 6. SAT

Question 1 (SAT - Practice test 3 - section 3 - Q8)

The line $y = kx + 4$, where k is a constant, is graphed in the xy-plane. If the line contains the point (c, d), where $c \neq 0$ and $d \neq 0$, what is the slope of the line in terms of c and d ?

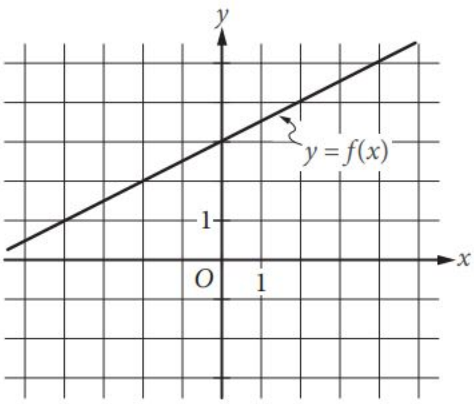
a. $\dfrac{d-4}{c}$ **b.** $\dfrac{c-4}{d}$ **c.** $\dfrac{4-d}{c}$ **d.** $\dfrac{4-c}{d}$

Question 2 (SAT - Practice test 3 - section 4 - Q26)

In the xy-plane, the line determined by the points $(2, k)$ and $(k, 32)$ passes through the origin. Which of the following could be the value of k ?

a. 0 **b.** 4 **c.** 8 **d.** 16

Question 3 (SAT - Practice test 3 - section 4 - Q28)



The graph of the linear function f is shown in the xy-plane above. The slope of the graph of the linear function g is 4 times the slope of the graph of f.
If the graph of g passes through the point $(0 ;\ -4)$, what is the value of $g(9)$?

a. 5 **b.** 9 **c.** 14 **d.** 18

Exercice 7. Un chewing-gum

Un chewing-gum pèse en moyenne 2,5 g. Il faut environ cinq années pour qu'un chewing-gum se décompose intégralement. On note $c(t)$ la masse du chewing-gum en gramme en fonction du temps t en année à partir du début de la décomposition.
On admet que c décroît linéairement.

1. Justifier que, pour tout réel positif t,
$$c(t) = 2,5 - 0,5t$$
2. Calculer $c(1,75)$ et interpréter le résultat.
3. Combien de temps faut-il attendre pour que le chewing-gum perde 90 % de sa masse initiale ?

Exercice 8. Degré Fahrenheit (°F) et degré Celsius

La température $f(x)$ en degré Fahrenheit (°F) en fonction de la température x en °C vérifie une croissance linéaire telle que

$$f(37) = 98,6 \text{ et } f(100) = 212$$

1. Déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la représentation graphique de f, puis en déduire l'expression de f.
2. Convertir 107,6 °F en °C.
3. Déterminer l'expression de la température en °C en fonction de celle en °F.
Obtient-on une fonction affine ? Justifier.

Exercice 9. Un mégot de cigarette

Un mégot de cigarette pèse en moyenne 220 mg. Dans le meilleur des cas, il faut une année de 365 jours pour qu'un mégot se décompose intégralement. On suppose de nouveau que la décomposition est linéaire. On note $m(t)$ la masse du mégot, en milligramme, en fonction du temps t, en année, à partir du début de la décomposition.

1. Justifier que :
$$m(t) = 220 - 220t$$
2. Calculer et interpréter $m(0,75)$.
3. Un mégot est en décomposition depuis le 1er janvier d'une année non bissextile. Quelle est sa masse le 14 mars ?

Partie III. Avec les suites arithmétiques

Exercice 10. En plongée

Lorsque l'on pratique la plongée sous-marine en loisir, il faut faire attention à ne pas remonter trop vite à la surface. La vitesse de remontée préconisée est depuis plusieurs dizaines d'années établie à 10 m/min.
Carine, plongeuse consciencieuse, respecte rigoureusement la vitesse préconisée à chaque instant pendant sa remontée.
On note $d(n)$ la distance parcourue pendant la remontée, où n représente le nombre de minutes écoulées.

1. Donner la nature de la suite d en précisant ses caractéristiques.
2. Calculer et interpréter $d(3)$.
3. Carine a plongé à 60 mètres de profondeur. Combien de minutes durera sa remontée à la surface ?

Exercice 11. Suite arithmétique et placement

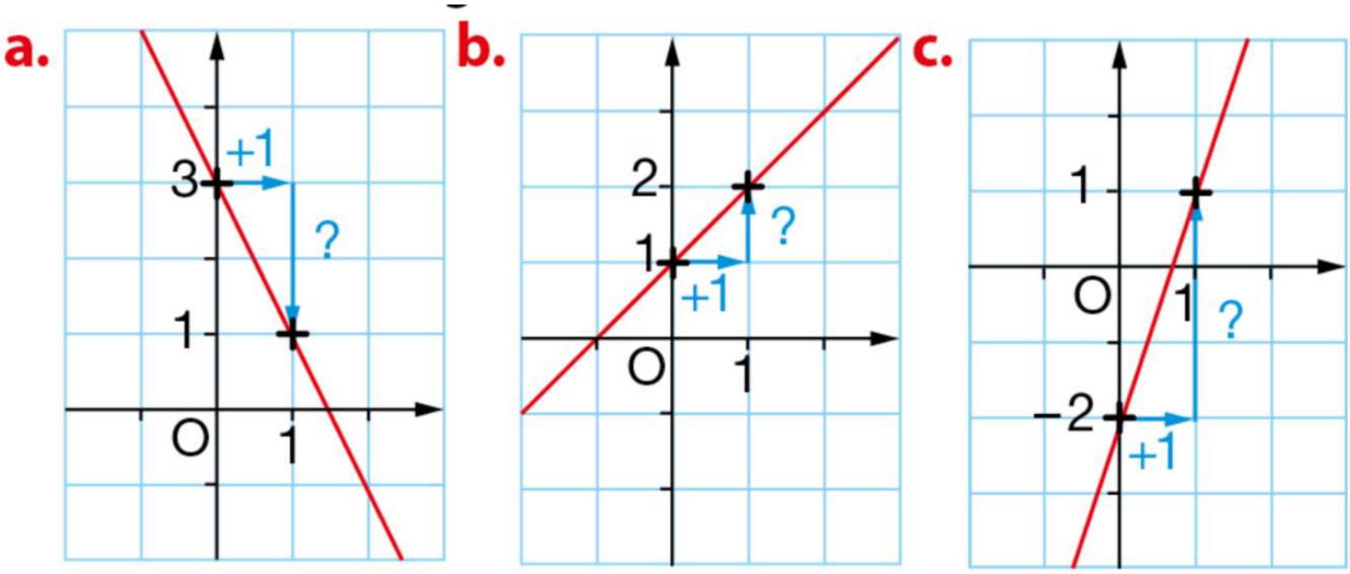
Guillaume décide de faire un placement à intérêts simples afin de prévoir l'achat d'une moto à 13000 e. Il place 9500 ? en janvier 2022. À chaque début de mois, son capital est augmenté de 1,1 % du montant initial. On note $p(n)$ le montant de son placement au bout de n mois après le 1er janvier 2022. On a donc $p(0) = 9500$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n :
$$p(n) = 104,5n + 9500$$
2. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $p(n) \geqslant 13000$.
3. À partir de quelle date Guillaume pourra-t-il acheter sa moto ? Justifier

Partie IV. Corrections

Correction de l'exercice 1 page 1

fonctions affines, f, g et h.
Déterminer par lecture graphique les expressions de ces fonctions affines (lire l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur).



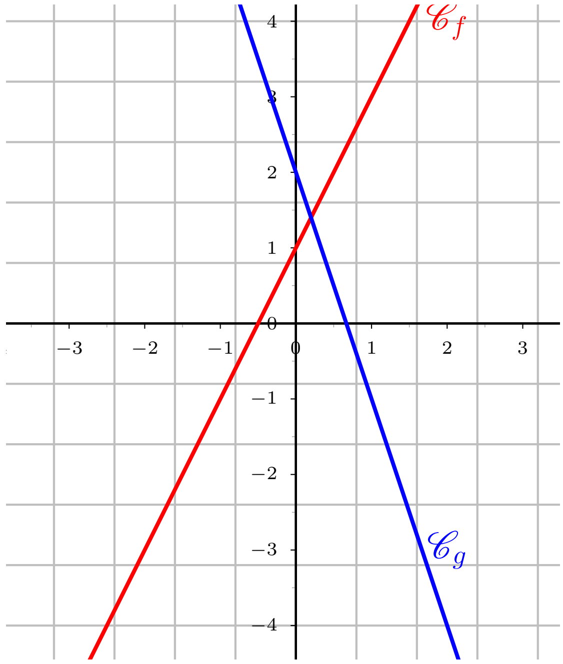
1. Soit f la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (a).
   Par lecture graphique :
   $$p = 3 \quad \text{et} \quad m = -2$$
   Donc
   $$f(x) = -2x + 3$$
2. Soit g affine définie par $g(x) = mx + p$ représentée par la droite du schéma (b).
   Par lecture graphique :
   $$p = 1 \quad \text{et} \quad m = 1$$
   Donc
   $$g(x) = x + 1$$
3. Soit h la fonction affine définie par $h(x) = mx + p$ associée à la droite du schéma (c).
   Par lecture graphique :
   $$p = -2 \quad \text{et} \quad m = 3$$
   Donc
   $$h(x) = 3x - 2$$

Correction de l'exercice 2 page 2

1. Dans le repère ci-dessous, tracer les droites (d) et (d') représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par : $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = -3x + 2$.

x	0	2
$f(x) = 2x + 1$	1	5

x	0	2
$g(x) = -3x + 2$	2	-4



2. Étude de la fonctions f.

2. a. Donner en justifiant rapidement, le tableau de variations de f.

Corrigé

La fonction affine f est de coefficient directeur $m = 2 > 0$ donc elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	↗	

2. b. Donner en justifiant rapidement, le tableau de signes de f.

Corrigé

La fonction affine f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = -\dfrac{1}{2}$ donc

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f(x) = 2x + 1$		$-$	0	$+$	

En effet

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
Variations de f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

3. Étude de la fonctions g.

3. a. Donner en justifiant rapidement, le tableau de variations de g.

Corrigé

La fonction affine g est de coefficient directeur $m = -3 < 0$ donc elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
Variations de g		$\searrow$	

3. b. Donner en justifiant rapidement, le tableau de signes de g.

Corrigé

La fonction affine g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et s'annule en $x = \dfrac{2}{3}$ donc

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $g(x) = -3x + 2$		$+$	0	$-$	

En effet

x	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
Variations de f		$\searrow$	0	$\searrow$	

Correction de l'exercice 3 page 3

1. Déterminer la fonction affine f dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	1	4
$f(x)$	5	9

Correction

- La fonction affine f est de la forme $f(x) = mx + p$.
- On détermine m.

$$\begin{cases} f(1) = 5 \\ f(4) = 9 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A(1\ ;\ 5) \in \mathscr{C}_f \\ B(4\ ;\ 9) \in \mathscr{C}_f \end{cases}$$

Or d'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$\begin{cases} A(1\ ;\ 5) \\ B(4\ ;\ 9) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9-5}{4-1} = \frac{4}{3}$$

On a donc :

$$f(x) = \frac{4}{3}x + p$$

- On détermine p.
Il reste alors à déterminer l'ordonnée à l'origine p.

$$A(1\ ;\ 5) \in \mathscr{C}_f \Longrightarrow f(1) = 5$$

Et

$$\begin{aligned} f(1) = 5 &\Longleftrightarrow \frac{4}{3} \times 1 + p = 5 \\ &\Longleftrightarrow \frac{4}{3} + p = 5 \\ &\Longleftrightarrow p = 5 - \frac{4}{3} = \frac{15}{3} - \frac{4}{3} = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

- Conclusion.

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}}$$

- Vérification.
  - On doit avoir $f(1) = 5$.

$$f(1) = \frac{4}{3} \times 1 + \frac{11}{3} = \frac{15}{3} = 5 \checkmark$$

  - On doit avoir $f(4) = 9$.

$$f(4) = \frac{4}{3} \times 4 + \frac{11}{3} = \frac{16+11}{3} = \frac{27}{3} = 9 \checkmark$$

2. Déterminer la fonction affine g de courbe représentative la droite passant par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ -4)$.

Correction

- La fonction affine g est de la forme $g(x) = mx + p$.
- On détermine m.

$$\begin{cases} A(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_g \\ B(2\ ;\ -4) \in \mathscr{C}_g \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} g(0) = 2 \\ g(2) = -4 \end{cases}$$

Or d'après la propriété de proportionnalité des accroissements :

$$\begin{cases} A(0\ ;\ 2) \\ B(2\ ;\ -4) \end{cases} \Longrightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-4-2}{2-0} = \frac{-6}{2} = -3$$

On a donc :

$$g(x) = -3x + p$$

- On détermine p.
Il reste alors à déterminer l'ordonnée à l'origine p, c'est simple ici car l'image de 0 donne directement p

$$A(0\ ;\ 2) \in \mathscr{C}_g \Longrightarrow g(0) = 2 = p$$

- Conclusion.
Donc

$$\boxed{g(x) = -3x + 2}$$

- Vérification.
  - On doit avoir $g(0) = 2$.

$$g(0) = -3 \times 0 + 2 = 2 \checkmark$$

  - On doit avoir $g(2) = -4$.

$$g(2) = -3 \times 2 + 2 = -6 + 2 = -4 \checkmark$$