Math93.com

TD 1 - 1re Maths ENS
Les Fonctions Exponentielles

Table des matières

Partie I. Définition des fonctions exponentielles

Propriété 1 (Variations et représentations graphique)

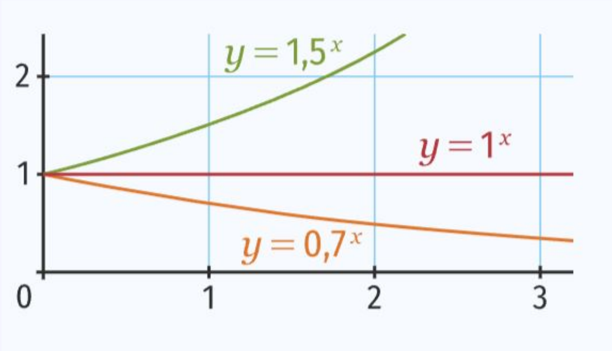
Soit a un réel strictement positif $\left(a \in \mathbb{R}_+^*\right) =]0\,;+\infty[$. Une fonction exponentielle f définie pour tout réel x positif $(x \in \mathbb{R}_+) = [0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = a^x$$

1. strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $a > 1$;

2. strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $0 < a < 1$;

3. constante sur $[0\,;+\infty[$ si, et seulement si, $a = 1$.



Exercice 1. Sens de variation

Donner le sens de variation des fonctions exponentielles suivantes.

1. f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1,17^x$$

2. g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 0,97^x$$

3. h définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

4. i définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

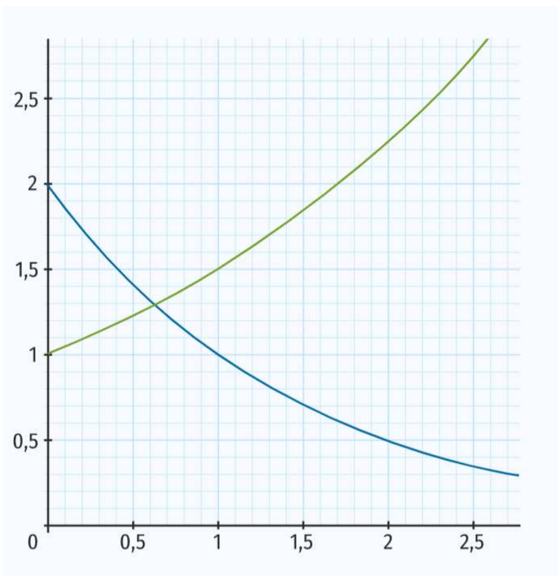
$$i(x) = \left(\frac{7}{6}\right)^x$$

Exercice 2. Sens de variation et courbe représentative

On considère les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1,5^x \text{ et } g(x) = 2 \times 0,5^x$$

En justifiant, associer chacune de ces fonctions à sa représentation graphique.



Exercice 3. Ranger des nombres

Dans chacun des cas, classer A, B, C et D dans l'ordre croissant sans utiliser la calculatrice.

1. $A = 2^3, 1$, $B = 2^{2,5}$, $C = 2^{7,3}$ et $D = 2^{\pi}$.

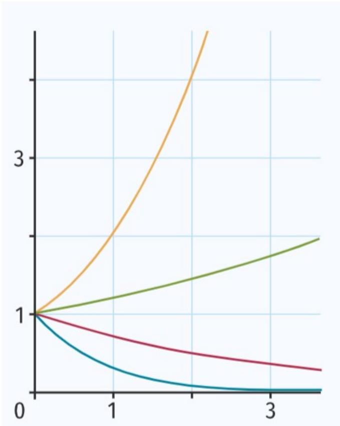
2. $A = 0,5^3, 1$, $B = 0,5^{2,5}$, $C = 0,5^{7,3}$ et $D = 0,5^{\pi}$.

Exercice 4.

On a représenté sur le graphique ci-dessous les fonctions f, g, h et k définies, pour tout réel x positif, par

$$f(x) = 1,2^x \ ; \ 0,7^x \ ; \ h(x) = 0,3^x \ \text{ et } \ k(x) = 2^x$$

Associer en justifiant chacune de ces fonctions à sa représentation graphique.



Exercice 5. Carbon 14 (ex 43

Pour modéliser l'âge d'un organisme biologique, on peut mesurer son taux de carbone 14. Tant que l'organisme est en vie, le taux est de 100%. Puis, ce taux commence à décroître à la mort de l'organisme en suivant le rythme donné par la courbe ci-dessous.

1. On prélève un échantillon d'un organisme biologique mort. Le taux de carbone 14 est de 70%. Depuis combien de temps cet organisme est-il mort ?

2. Un organisme biologique est mort depuis 10 000 ans. Quel est le taux de carbone 14 mesuré ?

3. La courbe représente la fonction f définie pour tout $x \geqslant 0$ par

$$f(x) = 100 \times 0,887^x$$

3. a. Justifier que la fonction f est décroissante.

3. b. À l'aide d'un outil numérique, combien de millier d'années faut-il attendre pour que le taux soit inférieur à 5%.

Partie II. Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

Propriété 2 (Propriétés (des puissances))

Soit a et b un réel strictement positifs et x et y positifs

1. Produit :
$$\boxed{a^x \times a^y = a^{x+y}}$$
2. Quotient :
$$\boxed{\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}}$$
3. Puissance :
$$\boxed{(a^x)^y = a^{xy}}$$
4. Produit de même puissance :
$$\boxed{a^x \times b^x = (ab)^x}$$
5. Quotient de même puissance :
$$\boxed{\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x}$$

Exercice 6. Propriétés

Sans calculatrice, montrer que les opérations suivantes ont toutes pour résultat 8.

1. $A = \dfrac{8^{3,2}}{8^{0,4} \times 8^{1,8}}$
2. $B = \dfrac{2^{4,1}}{5^{1,1} \times 10^{1,1}}$

Exercice 7. Propriétés

Simplifier les calculs.

1. $A = \left(\dfrac{1}{10}\right) \times 5^{3,2}$
2. $B = 3,5^{1,2} \times 3,5^{4,1}$
3. $C = 0,8^{6,2} \div 0,8^{5,1}$

Partie III. Taux d'évolution moyen

Propriété 3 (Taux d'évolution moyen (cas général))

1. Si une grandeur subit une évolution de taux t %, alors elle atteint la même valeur en subissant n évolutions successives de même taux $(1+t\,\%)^{\frac{1}{n}}$. où n est un entier naturel non nul.
2. Le nombre$(1+t\,\%)^{\frac{1}{n}} - 1$ est appelé taux moyen des n évolutions successives de taux global t %.

Exercice 8.

1. Un prix augmente de 15% puis baisse de 1%. De quel pourcentage global ce prix a-t-il évolué ?
2. Déterminer le taux d'évolution moyen.
3. Obtient-on le même taux d'évolution moyen si le prix diminue de 1% puis augmente de 15% ? Justifier.

Exercice 9.

D'après l'Insee, le nombre de naissances en France métropolitaine est passé de 802224 en 2010 à 696800 en 2020, ce qui correspond à une baisse d'environ 13% en dix ans.
Calculer l'évolution annuelle moyenne arrondie à $0,01\%$ du nombre de naissances en France métropolitaine entre 2010 et 2020.

Partie IV. Compléments : La fonction exponentielle de base e

Définition 1

Il existe un nombre irrationnel remarquable noté e dont une valeur approchée à 10^{-9} près est 2,718281828.
La fonction exponentielle de base e est la fonction f définie pour tout réel x par

$$f(x) = e^x$$

On note aussi $f(x) = exp(x)$.

Exercice 10. Propriétés de la fonction exponentielle

Simplifier les expressions suivantes pour x réel quelconque en les exprimant sous la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$ où u sera un polynôme.

- $A(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-3x}}{\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$
- $B(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{3x}}$
- $C(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2}{\mathrm{e}^{3x+1}}$
- $D(x) = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{3x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-2x} \times \left(\mathrm{e}^{2x}\right)^2}$

Réponses
$A(x) = e^{0} = 1$; $B(x) = e^{-3x}$; $C(x) = e^{3x-1}$; $D(x) = e^{x}$

Exercice 11. Propriétés de la fonction exponentielle

Démontrer, pour tout réel x, les égalités suivantes :

1. $\dfrac{2\,\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}$
2. $\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)^2 = \left(1+\mathrm{e}^{x}\right)^2 \times \mathrm{e}^{-2x}$
3. $\dfrac{2-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1} = 2 - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Fin du TD