



Math93.com

# TD 1 - 1re Maths ENS

## Les Fonctions Exponentielles

---

### Table des matières

---

<b>I</b>	<b>Définition des fonctions exponentielles</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Propriétés algébriques des fonctions exponentielles</b>	<b>4</b>
<b>III</b>	<b>Taux d'évolution moyen</b>	<b>4</b>
<b>IV</b>	<b>Compléments : La fonction exponentielle de base e</b>	<b>5</b>

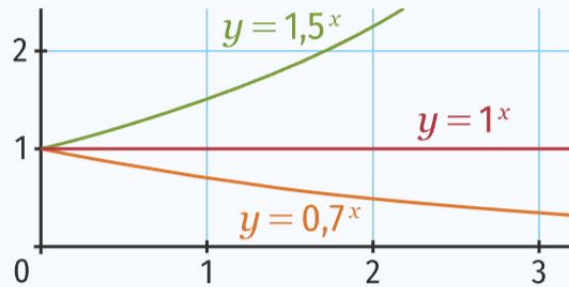
## Partie I. Définition des fonctions exponentielles

### Propriété 1 (Variations et représentations graphique)

Soit  $a$  un réel strictement positif ( $a \in \mathbb{R}_+^* = ]0; +\infty[$ ).  
 Une fonction exponentielle  $f$  définie pour tout réel  $x$  positif ( $x \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ ) par :

$$f(x) = a^x$$

1. strictement croissante sur  $[0; +\infty[$   
 si, et seulement si,  $a > 1$ ;
2. strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$   
 si, et seulement si,  $0 < a < 1$ ;
3. constante sur  $[0; +\infty[$   
 si, et seulement si,  $a = 1$ .



### Exercice 1. Sens de variation

Donner le sens de variation des fonctions exponentielles suivantes.

1.  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = 1,17^x$$

2.  $g$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$g(x) = 0,97^x$$

3.  $h$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

$$h(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

4.  $i$  définie sur  $[0; +\infty[$  par

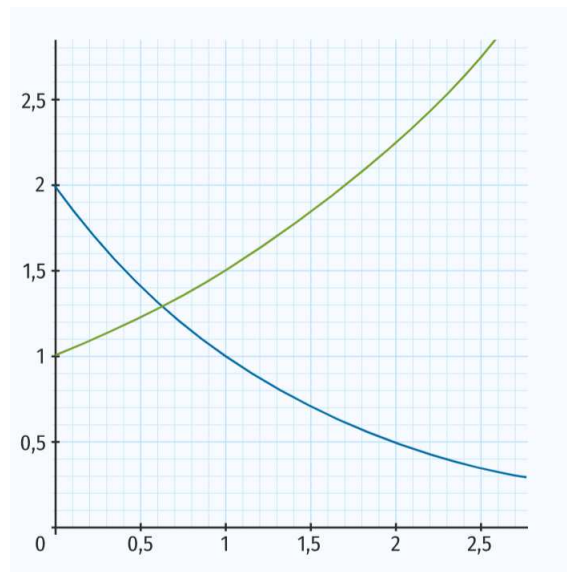
$$i(x) = \left(\frac{7}{6}\right)^x$$

### Exercice 2. Sens de variation et courbe représentative

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[0; +\infty[$  par

$$f(x) = 1,5^x \text{ et } g(x) = 2 \times 0,5^x$$

En justifiant, associer chacune de ces fonctions à sa représentation graphique.



**Exercice 3. Ranger des nombres**

Dans chacun des cas, classer A, B, C et D dans l'ordre croissant sans utiliser la calculatrice.

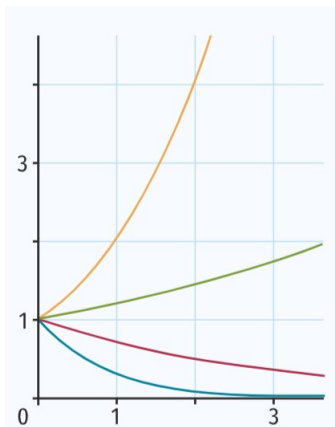
- $A = 2^3, 1, B = 2^{2,5}, C = 2^{7,3}$  et  $D = 2^\pi$ .
- $A = 0,5^3, 1, B = 0,5^{2,5}, C = 0,5^{7,3}$  et  $D = 0,5^\pi$ .

**Exercice 4.**

On a représenté sur le graphique ci-dessous les fonctions  $f, g, h$  et  $k$  définies, pour tout réel  $x$  positif, par

$$f(x) = 1,2^x ; 0,7^x ; h(x) = 0,3^x \text{ et } k(x) = 2^x$$

Associer en justifiant chacune de ces fonctions à sa représentation graphique.

**Exercice 5. Carbon 14 (ex 43)**

Pour modéliser l'âge d'un organisme biologique, on peut mesurer son taux de carbone 14. Tant que l'organisme est en vie, le taux est de 100%. Puis, ce taux commence à décroître à la mort de l'organisme en suivant le rythme donné par la courbe ci-dessous.

- On prélève un échantillon d'un organisme biologique mort. Le taux de carbone 14 est de 70%. Depuis combien de temps cet organisme est-il mort ?
- Un organisme biologique est mort depuis 10 000 ans. Quel est le taux de carbone 14 mesuré ?
- La courbe représente la fonction  $f$  définie pour tout  $x \geq 0$  par

$$f(x) = 100 \times 0,887^x$$

- Justifier que la fonction  $f$  est décroissante.
- À l'aide d'un outil numérique, combien de millier d'années faut-il attendre pour que le taux soit inférieur à 5%.

## Partie II. Propriétés algébriques des fonctions exponentielles

### Propriété 2 (Propriétés (des puissances))

Soit  $a$  et  $b$  un réel strictement positifs et  $x$  et  $y$  positifs

1. Produit :

$$a^x \times a^y = a^{x+y}$$

2. Quotient :

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

3. Puissance :

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

4. Produit de même puissance :

$$a^x \times b^x = (ab)^x$$

5. Quotient de même puissance :

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

### Exercice 6. Propriétés

Sans calculatrice, montrer que les opérations suivantes ont toutes pour résultat 8.

1.  $A = \frac{8^{3,2}}{8^{0,4} \times 8^{1,8}}$

2.  $B = \frac{2^{4,1}}{5^{1,1} \times 10^{1,1}}$

### Exercice 7. Propriétés

Simplifier les calculs.

1.  $A = \left(\frac{1}{10}\right) \times 5^{3,2}$

2.  $B = 3,5^{1,2} \times 3,5^{4,1}$

3.  $C = 0,8^{6,2} \div 0,8^{5,1}$

## Partie III. Taux d'évolution moyen

### Propriété 3 (Taux d'évolution moyen (cas général))

1. Si une grandeur subit une évolution de taux  $t$  %, alors elle atteint la même valeur en subissant  $n$  évolutions successives de même taux  $(1 + t \%)^{\frac{1}{n}}$ , où  $n$  est un entier naturel non nul.

2. Le nombre  $(1 + t \%)^{\frac{1}{n}} - 1$  est appelé taux moyen des  $n$  évolutions successives de taux global  $t$  %.

### Exercice 8.

- Un prix augmente de 15% puis baisse de 1%. De quel pourcentage global ce prix a-t-il évolué ?
- Déterminer le taux d'évolution moyen.
- Obtient-on le même taux d'évolution moyen si le prix diminue de 1% puis augmente de 15% ? Justifier.

### Exercice 9.

D'après l'Insee, le nombre de naissances en France métropolitaine est passé de 802224 en 2010 à 696800 en 2020, ce qui correspond à une baisse d'environ 13% en dix ans.

Calculer l'évolution annuelle moyenne arrondie à 0,01% du nombre de naissances en France métropolitaine entre 2010 et 2020.

## Partie IV. Compléments : La fonction exponentielle de base e

### Définition 1

Il existe un nombre irrationnel remarquable noté e dont une valeur approchée à  $10^{-9}$  près est 2,718281828. La fonction exponentielle de base e est la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  par

$$f(x) = e^x$$

On note aussi  $f(x) = \exp(x)$ .

### Exercice 10. Propriétés de la fonction exponentielle

Simplifier les expressions suivantes pour  $x$  réel quelconque en les exprimant sous la forme  $e^{u(x)}$  où  $u$  sera un polynôme.

$$\bullet A(x) = \frac{e^x \times e^{-3x}}{(e^{-x})^2}$$

$$\bullet B(x) = \frac{e^x \times e^{-x}}{e^{3x}}$$

$$\bullet C(x) = \frac{(e^{3x})^2}{e^{3x+1}}$$

$$\bullet D(x) = \frac{(e^{3x})^2 \times e^{-3x}}{e^{-2x} \times (e^{2x})^2}$$

#### Réponses

$$A(x) = e^0 = 1 ; B(x) = e^{-3x} ; C(x) = e^{3x-1} ; D(x) = e^x$$

### Exercice 11. Propriétés de la fonction exponentielle

Démontrer, pour tout réel  $x$ , les égalités suivantes :

$$1. \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = \frac{2}{e^{2x}+1}$$

$$2. \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)^2 = (1 + e^x)^2 \times e^{-2x}$$

$$3. \frac{2 - e^x}{e^x + 1} = 2 - \frac{3}{1 + e^{-x}}$$

↩ **Fin du TD** ↪