



Math93.com

# **TD 1 - Première Maths ENS**

## **Second Degré**

---

*Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.*

### **Table des matières**

---

<b>I</b>	<b>Équations du second degré</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Factorisation, études de signe, inéquations</b>	<b>5</b>
<b>III</b>	<b>Compléments et applications</b>	<b>9</b>
<b>IV</b>	<b>Python, c'est ma passion : débiter avec les listes</b>	<b>14</b>
<b>V</b>	<b>Corrections</b>	<b>18</b>

## Partie I. Équations du second degré

### Exercice 1. Équations du second degré : Niveau troisième!

Résoudre les équations suivantes de **deux façons**, en utilisant le discriminant, et en factorisant le polynôme du second degré.

Vérifiez vos résultats en utilisant le **menu « Équation »** de votre calculatrice.

1. $(E_1) : x^2 + 2x = 0;$	3. $(E_3) : x^2 - 5 = 0;$	5. $(E_5) : x^2 - 2x + 1 = 0;$
2. $(E_2) : x^2 = -5x;$	4. $(E_4) : x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0;$	6. $(E_6) : 4x^2 + 20x + 25 = 0;$



#### Réponses

$\mathcal{S}_1 = \{0; -2\}; \mathcal{S}_2 = \{0; -5\}; \mathcal{S}_3 = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}; \mathcal{S}_4 = \left\{\frac{3}{2}\right\}; \mathcal{S}_5 = \{1\}; \mathcal{S}_6 = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

**Exercice 2. Équations du second degré ... and others!**

Résoudre les équations suivantes et vérifier vos résultats en utilisant le **menu « Équation »** de votre calculatrice

1.  $(E_1) : x^2 + 5 = 0$

2.  $(E_2) : -2x^2 + 10x + 28 = 0$

3.  $(E_3) : 2x^2 = 3x + 1$

4.  $(E_4) : x^2 + 2x + 1 = 1 - 3x$

5.  $(E_5) : (x + 1)(5x^2 + 2x - 1) = 0$

6.  $(E_{10}) : \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 1} = 0$

7.  $(E_{13}) : x^3 - 5x^2 = -4x$

**Réponses**

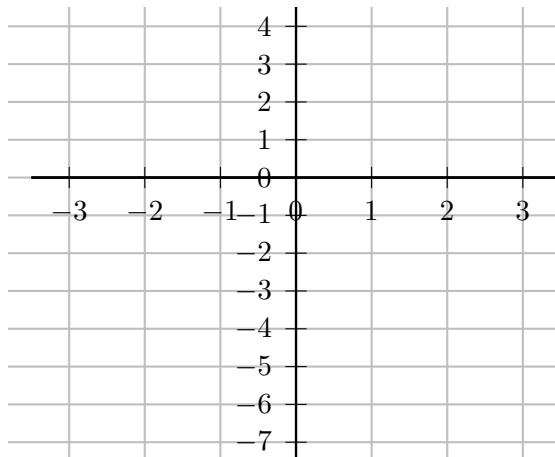
$$\mathcal{S}_1 = \emptyset ; \mathcal{S}_2 = \{-2 ; 7\} ; \mathcal{S}_3 = \left\{ \frac{3 + \sqrt{17}}{4} ; \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \right\} ; \mathcal{S}_4 = \{-5 ; 0\}$$

$$\mathcal{S}_5 = \left\{ -1 ; \frac{-1 - \sqrt{6}}{5} ; \frac{-1 + \sqrt{6}}{5} \right\} ; \mathcal{S}_{10} = \{1 ; 4\} ; \mathcal{S}_{13} = \{0 ; 1 ; 4\}$$

**Exercice 3. Coordonnées des points d'intersection de deux courbes**

1. Sur le graphique suivant, à l'aide de votre calculatrice, construire la courbe représentative de la fonction  $f : x \mapsto f(x) = (x - 2)(-x - 2)$  puis celle de la fonction affine  $g : x \mapsto g(x) = x - 1$ . Donner par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

$$A(\dots ; \dots) ; B(\dots ; \dots)$$

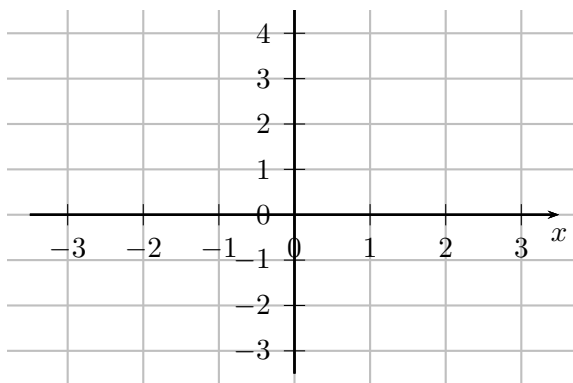


Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation :

$$(x - 2)(-x - 2) = x - 1$$

2. Sur le graphique suivant, à l'aide de votre calculatrice, construire la courbe représentative de la fonction  $h : x \mapsto h(x) = -x^2 + x + 2$  et celle de la fonction  $k : x \mapsto k(x) = (x + 1)^2$ . Donner par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

$$C(\dots ; \dots) ; D(\dots ; \dots)$$



Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation :

$$-x^2 + x + 2 = (x + 1)^2$$

**Réponses**

$$A\left(\frac{-1 - \sqrt{21}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{21}}{2}\right) ; B\left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{-3 + \sqrt{21}}{2}\right) ; C(-1; 0) ; D\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$$

## Partie II. Factorisation, études de signe, inéquations

### Exercice 4. Factorisation et étude de signe

1. Soit  $f_1$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_1(x) = x^2 + x + 1$ .  
Factoriser  $f_1$  puis résoudre l'inéquation  $f_1(x) > 0$ .
2.  $f_2$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_2(x) = -x^2 + 4x + 1$ .  
Factoriser  $f_2$  puis résoudre l'inéquation  $f_2(x) > 0$ .
3.  $f_3$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f_3(x) = -x^2 + 6x - 9$ .  
Factoriser  $f_3$  puis résoudre l'inéquation  $f_3(x) > 0$ .



#### Réponses

1.  $f_1(x) = x^2 + x + 1$ ;  $S_1 = \mathbb{R}$
2.  $f_2(x) = -(x + \sqrt{5} - 2)(x - \sqrt{5} - 2)$ ;  $S_2 = ]2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}[$
3.  $f_3(x) = -(x - 3)^2$ ;  $S_3 = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[ = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

**Exercice 5. Inéquation et interprétation graphique**

Reprendre les résultats de l'exercice 3 pour résoudre graphiquement puis par le calcul les questions suivantes :

1. Résoudre l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$  avec  $\begin{cases} f(x) = (x-2)(-x-2) \\ g(x) = x-1 \end{cases}$ .
2. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions  $h$  et  $k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} h(x) = -x^2 + x + 2 \\ k(x) = (x+1)^2 \end{cases}$ .

**Réponses**

$$S_1 = \left[ \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} ; \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} \right] \text{ et } h(x) \geq k(x) \iff x \in \left[ -1 ; -\frac{1}{2} \right]$$

**Exercice 6. (c) Position relative de deux courbes**

---

Soit  $\mathcal{P}$  la courbe d'équation  $y = x^2$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .  
Étudier la position relative de ces deux courbes.

## Partie III. Compléments et applications

### Exercice 7. Ensemble de définition

---

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1.  $f(x) = \sqrt{-6 - x + x^2}$ .

2.  $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - x - 12}}$ .

3.  $h(x) = \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 12x + 10}$ .

4.  $i(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{x}$ .

**Exercice 8. Problème de bénéfice**

Une entreprise textile fabrique et vend en gros des chemises. Le coût de fabrication, en euros, de  $q$  chemise, est donnée par l'expression :

$$C(q) = 0,1q^2 + 4q + 1\,000$$

1. Pour quels nombres de chemises fabriquées le coût est-il inférieur à 2 000 €.
2. Chaque chemise est vendue 29 €. Exprimer en fonction de  $q$  le bénéfice  $B(q)$  réalisé, en justifiant.
3. On admet par la suite que  $B(q) = -0,1q^2 + 25q - 1\,000$ . Pour quels nombres de chemises vendues le bénéfice est-il positif ou nul ?
4. Représenter graphiquement la fonction  $B : q \mapsto B(q)$ .
5. Pour quel nombre de chemises réalise-t-on le bénéfice maximal et quel est alors ce bénéfice ?

**Réponses**

*1. Pour une production strictement inférieure à 82 chemise / 3. Pour une production comprise entre 50 et 200 chemises / 5. Le bénéfice est maximale en fabriquant 125 chemises, il est alors de 562,50 euros*

**Exercice 9. Coût et chiffre d'affaire**

---

Une unité de production est sous-traitante pour une grande marque de jouets. Elle fabrique des poupées et vend toute sa production. Le coût total de fabrication de  $q$  milliers de poupées, exprimé en milliers d'euros (k€), est donné par :

$$C(q) = 0,05q^2 + q + 80 \text{ pour } q \in [0 ; 100]$$

1. Étude de  $C$ .

1. a. Étudier le sens de variation du coût total.

1. b. Résoudre l'équation  $C(q) = 480$ . En donner une interprétation concrète.

2. Le chiffre d'affaire  $R$  obtenu par la vente des  $q$  milliers de poupées produites est tel que :

$$R(50) = 300 \text{ et } R(60) = 360$$

C'est-à-dire que 60 milliers de poupées apportent 360 k€ de recette. sachant que le chiffre d'affaires est une fonction affine de la quantité, déterminer cette fonction affine  $R$ .

3. On considère la fonction  $B$  définie sur  $[0 ; 100]$  par :

$$B(q) = -0,05q^2 + 5q - 80$$

3. a. Établir que la fonction  $B$  est la fonction de bénéfice de cette usine pour la production (et vente) de  $q$  milliers de poupées, exprimée en k€.

3. b. Déterminer le sens de variations de  $B$ . en déduire le nombre de poupées à produire pour que le bénéfice soit maximal. Donner la valeur de ce bénéfice maximal.

3. c. Déterminer la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (c'est-à-dire telle que  $B(q)$  soit supérieur à zéro).

**Exercice 10. Un problème de pourcentage \***

---

Un propriétaire paie pour son appartement une taxe foncière de 750€ en 2016.

En 2017, cette taxe foncière augmente de  $t\%$ .

L'année suivante, elle augmente de  $(t + 5)\%$ . Le propriétaire paie à présent 834,30€.

Calculer la valeur de  $t$ .

**Exercice 11. (c) Cherchons un peu \***

---

Soit  $b$  un nombre réel et soit  $f$  la fonction trinôme définie par

$$f(x) = -x^2 + bx - 5$$

On sait que  $f$  admet un extremum en 4.

1. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
2. Déterminer la valeur de cet extremum.

## Partie IV. Python, c'est ma passion : débiter avec les listes

### Exercice 12. (c) Nombre de racines

Écrire deux fonctions en python :

- la première  $\text{delta}(a, b, c)$  qui prend en argument 3 flottants  $a, b$  et  $c$ , avec  $a$  non nul et qui renvoie le discriminant de l'expression polynomiale  $ax^2 + bx + c$  avec  $a$  non nul.

On traitera à part le cas où  $a$  est nul en utilisant un `assert` par exemple comme ci-dessous :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def delta(a,b,c):
    '''
    In : a,b,c float coefficients de ax^2+bx+c
    Out : discriminant de ax^2+bx+c avec a non nul
    '''
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    return ...

# autre notation à la place du docstring

def delta2(a : float, b : float, c: float ) -> float:
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    return ...
```

```
# Dans la console PYTHON
> delta(1,2,1)
1
```

- la deuxième  $\text{nbsolutions}(a, b, c)$  qui prend en argument 3 flottants  $a, b$  et  $c$  et qui renvoie le nombre de racines de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$ . On traitera à part le cas où  $a$  est nul en utilisant un `assert` par exemple comme ci-dessous :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def nbsolutions(a,b,c):
    '''
    In : a,b,c float
    Out : nombre de racines de ax^2+bx+c=0 avec a non nul
    '''
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    D = delta(a,b,c) # on utilise la fonction précédente
    ...
```

3. Pour effectuer vos tests, voici une astuce utile : dans la console, affecter des valeurs à vos variables, puis appeler votre fonction via un *print* comme ci dessous :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
a,b,c = 1,2,1
print(delta(a,b,c))

a,b,c = 1,5,6
print(nbsolutions(a,b,c))
```

On peut même rendre la présentation plus belle ainsi :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
a,b,c = 1,2,1
print("nbsolution(",a,b,c,") =", nbsolutions(a,b,c))
```

4. Tester vos fonctions avec les équations du second degré suivantes pour lesquels vous calculerez le discriminant à la main (ou avec la calculatrice) avant.

Un problème doit apparaitre pour la dernière, expliquez !

4. a. ( $E_1$ ) équation :  $2x^2 - 20x + 48 = 0$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \implies \Delta = \dots \implies \text{nombre de solutions réelles : } \dots \\ c = \dots \end{cases}$$

4. b. ( $E_2$ ) équation :  $-2x^2 + 12x - 18 = 0$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \implies \Delta = \dots \implies \text{nombre de solutions réelles : } \dots \\ c = \dots \end{cases}$$

4. c. ( $E_3$ ) équation :  $x^2 + x + 1 = 0$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \implies \Delta = \dots \implies \text{nombre de solutions réelles : } \dots \\ c = \dots \end{cases}$$

4. d. ( $E_4$ ) équation :  $x^2 + 0,8x + 0,16 = 0$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \implies \Delta = \dots \implies \text{nombre de solutions réelles : } \dots \\ c = \dots \end{cases}$$

## Exercice 13. (c) Racines d'une équation du second degré

### 13.1 Définition d'une liste



#### Une liste : L

Une liste est une suite d'éléments numérotés dont le premier indice est 0. En Python, une liste s'écrit entre crochets [... , ..., ..., ...] avec les éléments séparés par des virgules.

- Le premier élément de la liste est  $L[0]$ , le 2<sup>e</sup> est  $L[1]$ , ...
- Une liste peut être écrite de manière explicite :  $L = ["Lundi", "Mardi", "Mercredi"]$
- Sa longueur est donnée par  $len(L)$ .
- Si les éléments de la liste sont comparables, le max. est donné par  $max(L)$ , le min. par  $min(L)$
- $L=[]$  permet de définir une liste vide.
- Si  $L$  est une liste, l'instruction  $L.append(x)$  va ajouter l'élément  $x$  à la liste  $L$ .

```
# Par exemple
>>> maliste=[31, 'salut', 78, 'bonjour', 2022, 'NSI']
>>> maliste[0]
31
>>> maliste[1]
'salut'
>>> maliste[5]
'NSI'
>>> len(maliste)
6
>>> maliste.append('toto')
>>> maliste
[31, 'salut', 78, 'bonjour', 2022, 'NSI', 'toto']
```

### 13.2 Application

1. Écrire une fonction Python  $racines\_equation(a, b, c)$  qui prend en argument 3 flottants  $a, b$  et  $c$  et qui renvoie les racines de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$  sous forme d'une liste, éventuellement vide si il n'y a pas de racines réelles.

On traitera à part le cas où  $a$  est nul en utilisant un assert.

```
# Dans l'éditeur PYTHON

from math import sqrt # pour avoir la racine carrée

def racines_equation(a, b, c):
    '''
    In : a, b, c float
    Out : liste des racines de ax^2+bx+c=0 avec a non nul
    '''
    assert a != 0 # permet de s'assurer que a est non nul
    D = delta(a, b, c)
    ...
```

2. Tester votre fonction avec les exemples de l'exercice précédents en ayant préalablement calculé les racines.

2. a. ( $E_1$ ) équation :  $2x^2 - 20x + 48 = 0$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \implies \Delta = \dots \implies \text{Solutions réelles : } [\dots ; \dots] \\ c = \dots \end{cases}$$

2. b. ( $E_2$ ) équation :  $-2x^2 + 12x - 18 = 0$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \implies \Delta = \dots \implies \text{Solutions réelles : } [\dots] \\ c = \dots \end{cases}$$

2. c. ( $E_3$ ) équation :  $x^2 + x + 1 = 0$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \implies \Delta = \dots \implies \text{Solutions réelles : } [] \\ c = \dots \end{cases}$$

2. d. ( $E_4$ ) équation :  $x^2 + 0,8x + 0,16 = 0$

C'est une équation du second degré de la forme  $ax^2 + bx + c = 0$  avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \implies \Delta = \dots \implies \text{Solutions réelles : } [\dots] \\ c = \dots \end{cases}$$

## Partie V. Corrections

### Exercice 14. Correction de l'exercice 6

Soit  $\mathcal{P}$  la courbe d'équation  $y = x^2$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

Étudier la position relative de ces deux courbes.



#### Correction

Étudions la différence :  $x^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ . C'est de la forme  $ax^2 + bx + c$  avec  $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 > 0.$$

Le polynôme  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  a donc deux racines distinctes.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$$

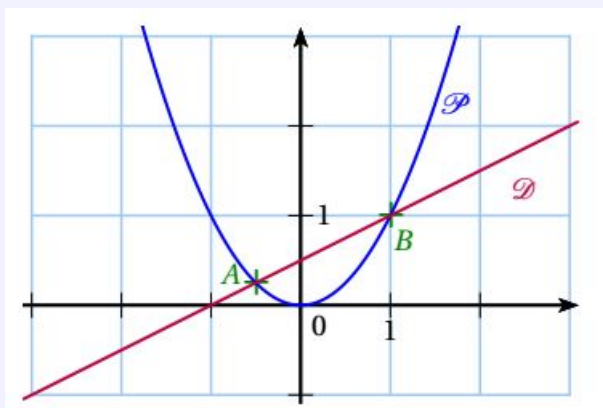
Le polynôme  $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$  est du signe de  $a = 1$ , donc positif en dehors de l'intervalle des racines :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$1$		$+\infty$
signe de $(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$		+	0	-	0	+

Donc  $\mathcal{P}$  est au-dessus de  $\mathcal{D}$  sur l'intervalle  $]-\frac{1}{2}; 1[$ .

$\mathcal{P}$  est en-dessous de  $\mathcal{D}$  sur l'intervalle  $]-\infty; -\frac{1}{2}[ \cup ]1; +\infty[$ .

Il y a deux points d'intersection de coordonnées  $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$  et  $(1; 1)$ .



**Exercice 15. Correction de l'exercice 11**

Soit  $b$  un nombre réel et soit  $f$  la fonction trinôme définie par

$$f(x) = -x^2 + bx - 5$$

On sait que  $f$  admet un extremum en 4.

1. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

**Correction**

- $f$  est une fonction polynôme du second degré de la forme  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec un coefficient dominant  $a = -1 < 0$  donc elle est croissante sur  $]-\infty; \alpha]$  puis décroissante sur  $[\alpha; +\infty[$ .
- On sait que  $f$  admet un extremum en  $\alpha = 4$ .
- Donc  $f$  est croissante sur  $]-\infty; 4]$  puis décroissante sur  $[4; +\infty[$ .
- Donc en 4,  $f$  admet un maximum.

2. Déterminer la valeur de cet extremum.

**Correction**

- On sait d'après le cours que :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{-2} = \frac{b}{2}$$

Or puisque  $\alpha = 4$  on a :

$$\frac{b}{2} = 4 \iff b = 8$$

- Donc la fonction  $f$  est définie par

$$f(x) = -x^2 + 8x - 5$$

- La valeur de ce maximum est alors :

$$f(4) = 11$$

**Exercice 16. Correction des exercices 12 et 13**

La correction est disponible en cliquant sur ce lien :

<https://replit.com/@fduffaud/1re-seconddegre-nombresolutions#main.py>