Math93.com

TD 1 - Première Maths ENS
Second Degré

Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Table des matières

Partie I. Équations du second degré

Exercice 1. Équations du second degré : Niveau troisième !

Résoudre les équations suivantes de **deux façons**, en utilisant le discriminant, et en factorisant le polynôme du second degré.
Vérifiez vos résultats en utilisant le **menu « Équation »** de votre calculatrice.

1. $(E_1) \ : \ x^2+2x=0\,;$
2. $(E_2) \ : \ x^2=-5x\,;$
3. $(E_3) \ : \ x^2-5=0\,;$
4. $(E_4) \ : \ x^2-3x+\dfrac{9}{4}=0\,;$
5. $(E_5) \ : \ x^2-2x+1=0\,;$
6. $(E_6) \ : \ 4x^2+20x+25=0\,;$

Réponses

$\mathscr{S}_1=\{0\,;\,-2\}$; $\mathscr{S}_2=\{0\,;\,-5\}$; $\mathscr{S}_3=\{-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}\}$; $\mathscr{S}_4=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; $\mathscr{S}_5=\{1\}$; $\mathscr{S}_6=\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$

Exercice 2. Équations du second degré ... and others ! (c)

Résoudre les équations suivantes et vérifier vos résultats en utilisant le **menu « Équation »** de votre calculatrice

1. $(E_1) \ : \ x^2+5=0$
2. $(E_2) \ : \ -2x^2+10x+28=0$
3. $(E_3) \ : \ 2x^2=3x+1$
4. $(E_4) \ : \ x^2+2x+1=1-3x$
5. $(E_5) \ : \ (x+1)(5x^2+2x-1)=0$
6. $(E_{10}) \ : \ \dfrac{x^2-5x+4}{x+1}=0$
7. $(E_{13}) \ : \ x^3-5x^2=-4x$

Réponses

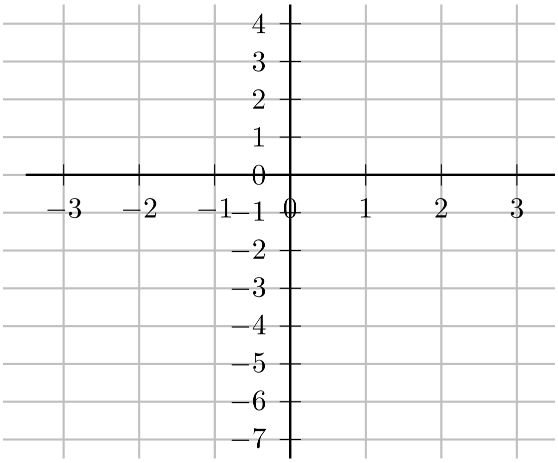
$\mathscr{S}_1=\varnothing$; $\mathscr{S}_2=\{-2\,;\,7\}$; $\mathscr{S}_3=\left\{\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\,;\,\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}\right\}$; $\mathscr{S}_4=\{-5\,;\,0\}$

$\mathscr{S}_5=\left\{-1\,;\,\dfrac{-1-\sqrt{6}}{5}\,;\,\dfrac{-1+\sqrt{6}}{5}\right\}$; $\mathscr{S}_{10}=\{1\,;\,4\}$; $\mathscr{S}_{13}=\{0\,;\,1\,;\,4\}$

Exercice 3. * Coordonnées des points d'intersection de deux courbes

1. Sur le graphique suivant, à l'aide de votre calculatrice, construire la courbe représentative de la fonction f : $x \longmapsto f(x) = (x-2)(-x-2)$ puis celle de la fonction affine $g : x \longmapsto g(x) = x - 1$. Donner par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

$$\boxed{A(\cdots\,;\,\cdots) \quad ; \quad B(\cdots\,;\,\cdots)}$$

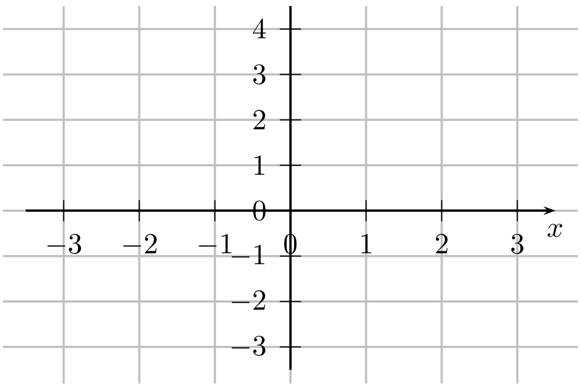


Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation :

$$(x-2)(-x-2) = x - 1$$

2. Sur le graphique suivant, à l'aide de votre calculatrice, construire la courbe représentative de la fonction $h : x \longmapsto h(x) = -x^2 + x + 2$ et celle de la fonction $k : x \longmapsto k(x) = (x+1)^2$. Donner par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

$$\boxed{C(\cdots\,;\,\cdots) \quad ; \quad D(\cdots\,;\,\cdots)}$$



Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation :

$$-x^2 + x + 2 = (x+1)^2$$

Réponses

$A\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\,;\,\dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)$; $B\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\,;\,\dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)$; $C(-1\,;\,0)$; $D\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{9}{4}\right)$

Partie II. Factorisation, études de signe, inéquations

Exercice 4. Factorisation et étude de signe

1. Soit f_1, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x^2 + x + 1$.
Factoriser f_1 puis résoudre l'inéquation $f_1(x) > 0$.

2. f_2, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = -x^2 + 4x + 1$.
Factoriser f_2 puis résoudre l'inéquation $f_2(x) > 0$.

3. f_3, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_3(x) = -x^2 + 6x - 9$.
Factoriser f_3 puis résoudre l'inéquation $f_3(x) > 0$.

Réponses

1. $f_1(x) = x^2 + x + 1$; $S_1 = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = -\left(x + \sqrt{5} - 2\right)\left(x - \sqrt{5} - 2\right)$; $S_2 = \left]2 - \sqrt{5}\,;\,2 + \sqrt{5}\right[$
3. $f_3(x) = -(x-3)^2$; $S_3 =]-\infty\,;\,3[\cup]3\,;\,+\infty[= \mathbb{R} \setminus \{3\}$

Exercice 5. Inéquation et interprétation graphique

Reprendre les résultats de l'exercice 3 pour résoudre graphiquement puis par le calcul les questions suivantes :

1. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ avec $\begin{cases} f(x) = (x-2)(-x-2) \\ g(x) = x - 1 \end{cases}$.

2. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = -x^2 + x + 2 \\ k(x) = (x+1)^2 \end{cases}$.

Réponses

$S_1 = \left[\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\,;\,\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right]$ *et* $h(x) \geqslant k(x) \iff x \in \left[-1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right]$

Exercice 6. (c) Position relative de deux courbes

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.
Étudier la position relative de ces deux courbes.

Partie III. Compléments et applications

Exercice 7. Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1. $f(x) = \sqrt{-6 - x + x^2}$.
2. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - x - 12}}$.
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 12x + 10}$.
4. $i(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{x}$.

Exercice 8. Problème de bénéfice

Une entreprise textile fabrique et vend en gros des chemises. Le coût de fabrication, en euros, de q chemise, est donnée par l'expression :

$$C(q) = 0,1q^2 + 4q + 1\,000$$

1. Pour quels nombres de chemises fabriquées le coût est-il inférieur à 2 000 €.
2. Chaque chemise est vendue 29 €.
   Exprimer en fonction de q le bénéfice $B(q)$ réalisé, en justifiant.
3. On admet par la suite que $B(q) = -0,1q^2 + 25q - 1\,000$.
   Pour quels nombres de chemises vendues le bénéfice est-il positif ou nul ?
4. Représenter graphiquement la fonction $B \ : \ q \longmapsto B(q)$.
5. Pour quel nombre de chemises réalise-t-on le bénéfice maximal et quel est alors ce bénéfice ?

Réponses

1. *Pour une production strictement inférieure à 82 chemise* **/** ***3.*** *Pour une production comprise entre 50 et 200 chemises* **/** ***5.*** *Le bénéfice est maximale en fabriquant 125 chemises, il est alors de 562,50 euros*

Exercice 9. Coût et chiffre d'affaire

Une unité de production est sous-traitante pour une grande marque de jouets. Elle fabrique des poupées et vend toute sa production. Le coût total de fabrication de q milliers de poupées, exprimé en milliers d'euros (k€), est données par :

$$C(q) = 0,05q^2 + q + 80 \text{ pour } q \in [0\ ;\ 100]$$

1. Étude de C.

1. a. Étudier le sens de variation du coût total.

1. b. Résoudre l'équation $C(q) = 480$. En donner une interprétation concrète.

2. Le chiffre d'affaire R obtenu par la vente des q milliers de poupées produites est tel que :

$$R(50) = 300 \text{ et } R(60) = 360$$

C'est-à-dire que 60 milliers de poupées apportent 360 k€ de recette. sachant que le chiffre d'affaires est une fonction affine de la quantité, déterminer cette fonction affine R.

3. On considère la fonction B définie sur $[0\ ;\ 100]$ par :

$$B(q) = -0,05q^2 + 5q - 80$$

3. a. Établir que la fonction B est la fonction de bénéfice de cette usine pour la production (et vente) de q milliers de poupées, exprimée en k€.

3. b. Déterminer le sens de variations de B. en déduire le nombre de poupées à produire pour que le bénéfice soit maximal. Donner la valeur de ce bénéfice maximal.

3. c. Déterminer la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (c'est-à-dire telle que $B(q)$ soit supérieur à zéro).

Exercice 10. Un problème de pourcentage *

Un propriétaire paie pour son appartement une taxe foncière de 750€ en 2016.
En 2017, cette taxe foncière augmente de $t\%$.
L'année suivante, elle augmente de $(t+5)\%$. Le propriétaire paie à présent $834,30$€.
Calculer la valeur de t .

Exercice 11. (c) Cherchons un peu *

Soit b un nombre réel et soit f la fonction trinôme définie par

$$f(x) = -x^2 + bx - 5$$

On sait que f admet un extremum en 4.

1. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
2. Déterminer la valeur de cet extremum.

Partie IV. Python, c'est ma passion : débuter avec les listes

Exercice 12. (c) Nombre de racines

Écrire deux fonctions en python :

1. la première $delta(a, b, c)$ qui prend en argument 3 flottants a, b et c, avec a non nul et qui renvoie le discriminant de l'expression polynomiale $ax^2 + bx + c$ avec a non nul.

On traitera à part le cas où a est nul en utilisant un assert par exemple comme ci-dessous :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def delta(a,b,c):
    '''
    In  :  a,b,c float coefficients de  ax^2+bx+c
    Out : discriminant de ax^2+bx+c avec a non nul
    '''
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    return ...

# autre notation à la place du docstring

def delta2(a : float, b : float, c: float ) -> float:
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    return ...
```

```
# Dans la console PYTHON
> delta(1,2,1)
1
```

2. la deuxième $nbsolutions(a, b, c)$ qui prend en argument 3 flottants a, b et c et qui renvoie le nombre de racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On traitera à part le cas où a est nul en utilisant un assert par exemple comme ci-dessous :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
def nbsolutions(a,b,c):
    '''
    In  :  a,b,c float
    Out : nombre de racines de ax^2+bx+c=0 avec a non nul
    '''
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    D = delta(a,b,c) # on utilise la fonction précédente
    ...
```

3. Pour effectuer vos tests, voici une astuce utile : dans la console, affecter des valeurs à vos variables, puis appeler votre fonction via un *print* comme ci dessous :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
a,b,c = 1,2,1
print(delta(a,b,c))

a,b,c = 1,5,6
print(nbsolutions(a,b,c))
```

On peut même rendre la présentation plus belle ainsi :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
a,b,c = 1,2,1
print("nbsolution(",a,b,c,") =", nbsolutions(a,b,c))
```

4. Tester vos fonctions avec les équations du second degré suivantes pour lesquels vous calculerez le discriminant à la main (ou avec la calculatrice) avant.

Un problème doit apparaitre pour la dernière, expliquez !

4. a. (E_1) équation : $2x^2 - 20x + 48 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{nombre de solutions réelles : } \cdots\cdots\cdots$$

4. b. (E_2) équation : $-2x^2 + 12x - 18 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{nombre de solutions réelles : } \cdots\cdots\cdots$$

4. c. (E_3) équation : $x^2 + x + 1 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{nombre de solutions réelles : } \cdots\cdots\cdots$$

4. d. (E_4) équation : $x^2 + 0,8x + 0,16 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{nombre de solutions réelles : } \cdots\cdots\cdots$$

Exercice 13. (c) Racines d'une équation du second degré

13.1 Définition d'une liste

Une liste : L

Une liste est une suite d'éléments numérotés dont le premier indice est 0. En Python, une liste s'écrit entre crochets [... , ..., ..., ...] avec les éléments séparés par des virgules.

- Le premier élément de la liste est L[0], le 2e est L[1], ...
- Une liste peut être écrite de manière explicite : L = ["Lundi", "Mardi","Mercredi"]
- Sa longueur est donnée par $len(L)$.
- Si les éléments de la liste sont comparables, le max. est donné par *max(L)*, le min. par *min(L)*
- L=[] permet de définir une liste vide.
- Si L est une liste, l'instruction *L.append(x)* va ajouter l'élémentt [x] à la liste L.

```
# Par exemple
>>> maliste=[31,'salut',78,'bonjour',2022,'NSI']
>>> maliste[0]
31
>>> maliste[1]
'salut'
>>> maliste[5]
'NSI'
>>> len(maliste)
6
>>> maliste.append('toto')
>>> maliste
[31,'salut',78,'bonjour',2022,'NSI','toto']
```

13.2 Application

1. Écrire une fonction Python $racines\_equation(a, b, c)$ qui prend en argument 3 flottants a, b et c et qui renvoie les racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ sous forme d'une liste, éventuellement vide si il n'y a pas de racines réelles.

On traitera à part le cas où a est nul en utilisant un assert.

```
# Dans l'éditeur PYTHON

from math import sqrt # pour avoir la racine carrée

def racines_equation(a,b,c):
    '''
    In  :  a,b,c float
    Out : liste des racines de ax^2+bx+c=0 avec a non nul
    '''
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    D = delta(a,b,c)
    ...
```

2. Tester votre fonction avec les exemples de l'exercice précédents en ayant préalablement calculé les racines.

2. a. (E_1) équation : $2x^2 - 20x + 48 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{Solutions réelles : } \left[\cdots\cdots\cdots\ ;\ \cdots\cdots\cdots\right]$$

2. b. (E_2) équation : $-2x^2 + 12x - 18 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{Solutions réelles : } \left[\cdots\cdots\cdots\right]$$

2. c. (E_3) équation : $x^2 + x + 1 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{Solutions réelles : } \left[\right]$$

2. d. (E_4) équation : $x^2 + 0,8x + 0,16 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{Solutions réelles : } \left[\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

Partie V. Corrections

Correction de l'exercice 2

1. $(E_1) \ : \ x^2 + 5 = 0$

Correction

- Méthode 1.

$$x^2 + 5 = 0 \iff x^2 = -5$$

Or un réel au carré est toujours positif ou nul, donc cette équation n'admet pas de solution réelle.

- Méthode 2.
L'équation $x^2 \ 0x + \ 5 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 5 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = -20 < 0$$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, l'équation n'admet pas de racine réelle.

2. $(E_2) \ : \ -2x^2 + 10x + 28 = 0$

Correction

L'équation $-2x^2 + \ 10x + \ 28 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 10 \\ c = 28 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 324 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-10 - \sqrt{324}}{-4} = 7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10 + \sqrt{324}}{-4} = -2$$

3. $(E_3) \ : \ 2x^2 = 3x + 1$

Correction

$$2x^2 = 3x + 1 \iff 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

L'équation $2x^2 \ -3x \ -1 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -3 \\ c = -1 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 17 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \approx -0.3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \approx 1.8$$

4. $(E_4) \quad : \quad x^2 + 2x + 1 = 1 - 3x$

Correction

$$x^2 + 2x + 1 = 1 - 3x \iff x^2 + 2x + 1 - 1 + 3x = 0 \iff x^2 + 5x = 0$$

- Méthode 1.

$$x^2 + 5x = 0 \iff x(x+5) = 0 \iff \underline{x = 0 \text{ ou } x = -5}$$

- Méthode 2.
L'équation $x^2 + \ \ 5x \ 0 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 25 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{25}}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{25}}{2} = -0$$

5. $(E_5) \quad : \quad (x+1)(5x^2 + 2x - 1) = 0$

Correction

On a une EPN (Équation Produit Nul)

$$\begin{aligned} (x+1)(5x^2+2x-1) = 0 &\iff \Big(x+1=0\Big) \text{ ou } \Big(5x^2+2x-1=0\Big) \\ &\iff \Big(\underline{x=-1}\Big) \text{ ou } \Big(5x^2+2x-1=0\Big) \end{aligned}$$

On a déjà une solution qui est $x = -1$, il reste à résoudre la deuxième équation $5x^2 + 2x - 1 = 0$.
L'équation $5x^2 + \ \ 2x \ -1 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 24 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{24}}{10} \approx -0.7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{24}}{10} \approx 0.3$$

Et puisque $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ on obtient :

$$\mathscr{S}_5 = \left\{-1\,;\, \frac{-1-\sqrt{6}}{5}\,;\, \frac{-1+\sqrt{6}}{5}\right\}$$

6. $(E_{10})\ :\ \dfrac{x^2-5x+4}{x+1}=0$

Correction

On a ici une valeur interdite :

$$\frac{x^2-5x+4}{x+1}=0 \iff \begin{cases} x+1\neq 0 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq -1 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases}$$

L'équation $x^2\ -5x+\ \ 4=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{array}\right| \implies \Delta=9>0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2}=4$$

Les deux solutions sont différentes de -1 donc elles sont valides.

7. $(E_{13})\ :\ x^3-5x^2=-4x$

Correction

On va factoriser pour obtenir une EPN :

$$\begin{aligned} x^3-5x^2=-4x &\iff x^3-5x^2+4x=0 \\ &\iff x(x^2-5x+4)=0 \\ &\iff \big(x=0\big) \text{ ou } \big(x^2-5x+4=0\big) \end{aligned}$$

On a déjà une solution qui est $x=0$, il reste à résoudre la deuxième équation $x^2-5x+4=0$.
L'équation $x^2\ -5x+\ \ 4=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{array}\right| \implies \Delta=9>0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2}=4$$

On obtient :

$$S_{13}=\{0\ ;\ 1\ ;\ 4\}$$

L'équation $x^2 - 5x + 4 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 4 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 9 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{5-\sqrt{9}}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{9}}{2} = 4$$

Les deux solutions sont différentes de -1 donc elles sont valides.

Correction de l'exercice 6

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
Étudier la position relative de ces deux courbes.

Correction

Étudions la différence : $x^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. C'est de la forme ax^2+bx+c avec $\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 > 0.$

Le polynôme $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ a donc deux racines distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

et

$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 1$

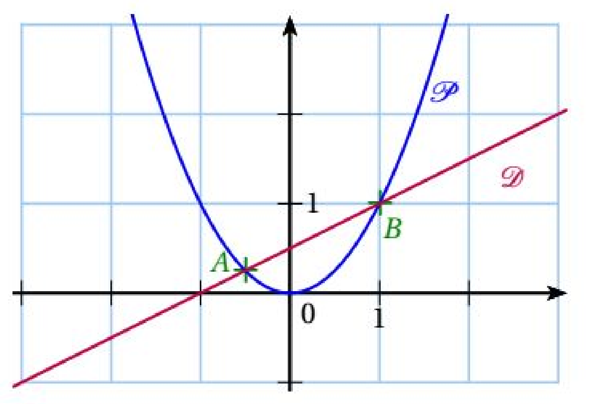
Le polynôme $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ est du signe de $a = 1$, donc positif en dehors de l'intervalle des racines :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de $(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{P}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

$\mathcal{P}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Il y a deux points d'intersection de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ et $(1\ ;\ 1)$.



Correction de l'exercice 11

Soit b un nombre réel et soit f la fonction trinôme définie par

$$f(x) = -x^2 + bx - 5$$

On sait que f admet un extremum en 4.

1. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

Correction

- f est une fonction polynôme du second degré de la forme $x \longmapsto ax^2+bx+c$ avec un coefficient dominant $a = -1 < 0$ donc elle est croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.
- On sait que f admet un extremum en $\alpha = 4$.
- Donc f est croissante sur croissante sur $]-\infty\,;\,4]$ puis décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$.
- Donc en 4, f admet un maximum.

2. Déterminer la valeur de cet extremum.

Correction

- On sait d'après le cours que :
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{-2} = \frac{b}{2}$$
Or puisque $\alpha = 4$ on a :
$$\frac{b}{2} = 4 \iff b = 8$$
- Donc la fonction f est définie par
$$f(x) = -x^2 + 8x - 5$$
- La valeur de ce maximum est alors :
$$f(4) = 11$$

Correction des exercices 12 et 13

La correction est disponible en cliquant sur ce lien :

https://replit.com/@fduffaud/1re-seconddegre-nombresolutions#main.py