Math93.com

TD 1 - 1re Maths ENS
Dérivation Partie 2

Table des matières

Partie I. Lectures graphiques : un premier classique

Méthode

Grand classique au bac et bien plus délicat qu'il n'y parait au premier regard !

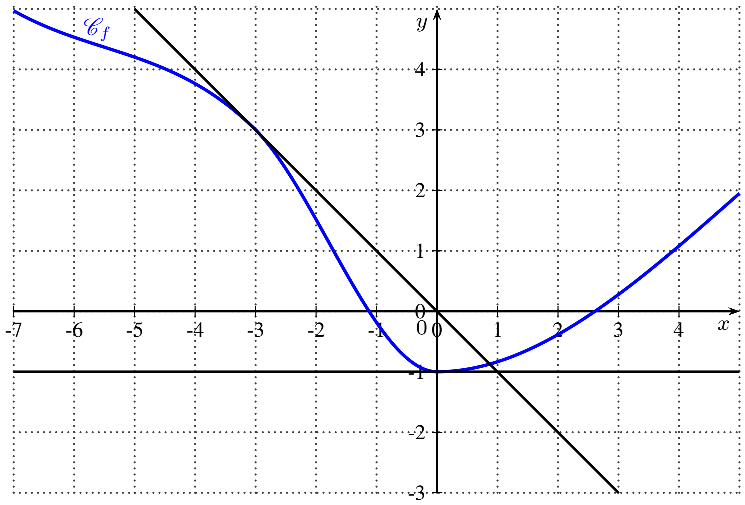
1. Soit on donne la courbe de la fonction et des tangentes et on doit répondre à des questions ;
2. Soit on donne la courbe de la fonction dérivée et on doit retrouver les variations de la fonction ou répondre à un QCM ;
3. Ou encore on donne 2 courbes, et on doit identifier celle de la fonction f et celle de la dérivée f' en argumentant ;
4. Ou encore on donne 3 courbes, et on doit identifier celle de la fonction f, celle de la dérivée f' et celle de la dérivée seconde f'' en argumentant.
5. Ou encore on donne plusieurs courbes et on doit répondre à plusieurs question en argumentant.

ASTUCE : CE QUI NOUS INTÉRESSE SUR LA DÉRIVÉE, C'EST SON SIGNE, DONC ON DRESSE LE TABLEAU DE SIGNE DE LA DÉRIVÉE GRÂCE A SA COURBE.

Exercice 1. (c) D'après la courbe de la fonction :Liban mai 2016

Question 1

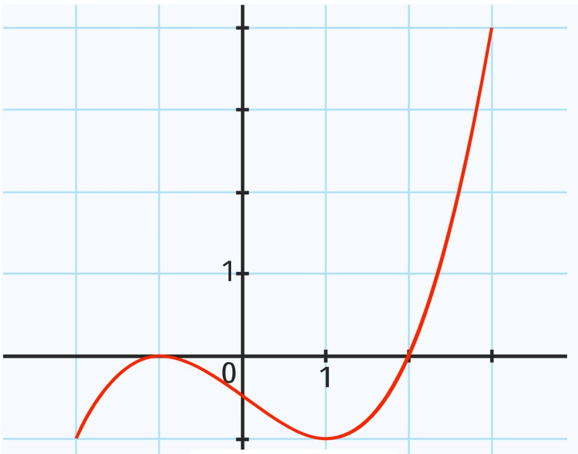
La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

Exercice 2. (c) D'après la courbe de la dérivée

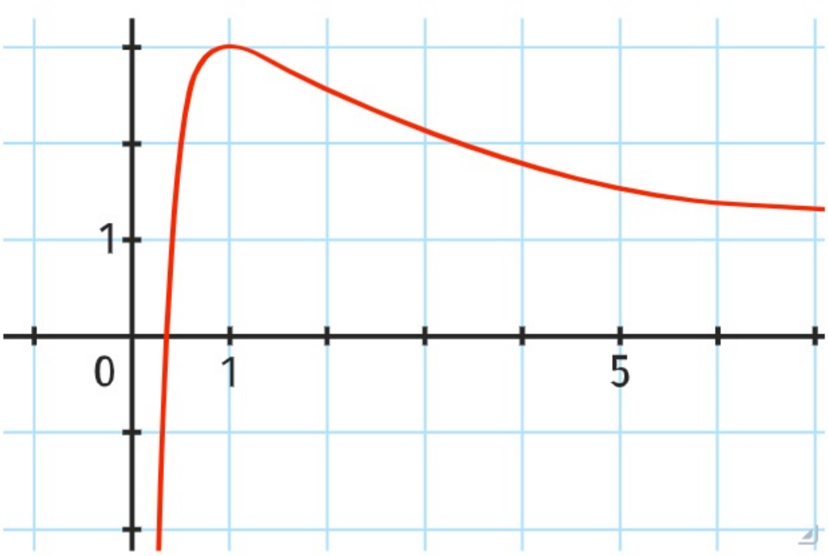
h est une fonction définie et dérivable sur $I = [-2\ ;\ 3]$. La courbe ci-dessous représente la fonction dérivée h' de h sur I.



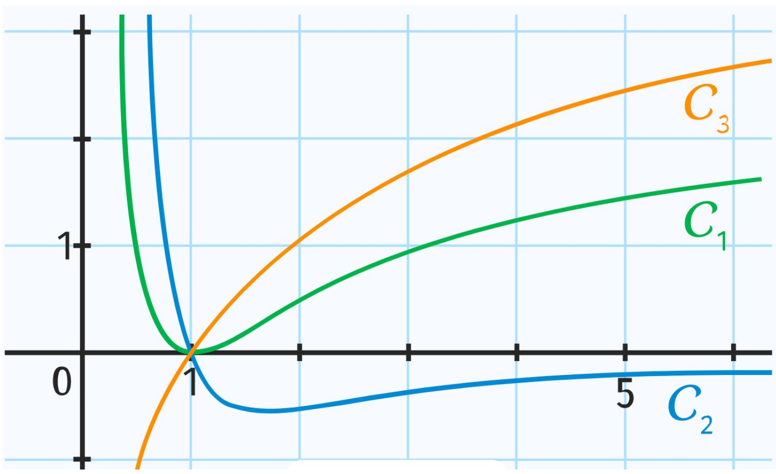
Dresser le tableau de variations de h sur I.

Exercice 3. Plusieurs courbes possibles pour la dérivée

f est une fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$. La représentation graphique de f est donnée ci-dessous.

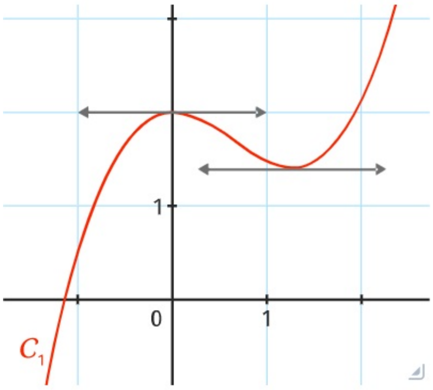


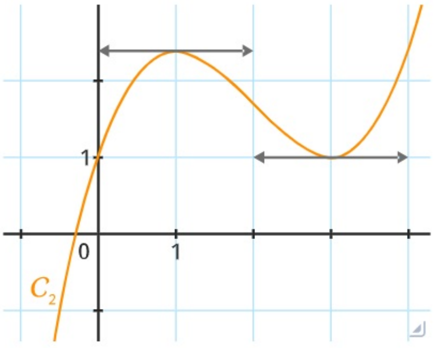
Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, laquelle est susceptible de représenter la fonction f' , fonction dérivée de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$? Justifier.

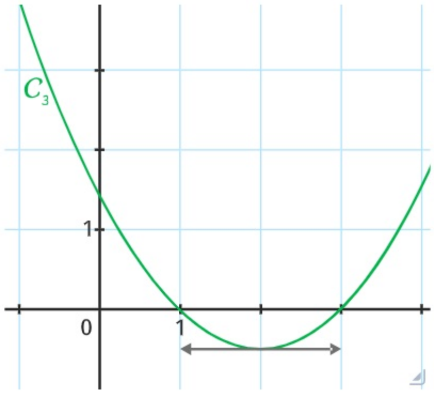


Exercice 4. Plusieurs courbes possibles pour la fonction

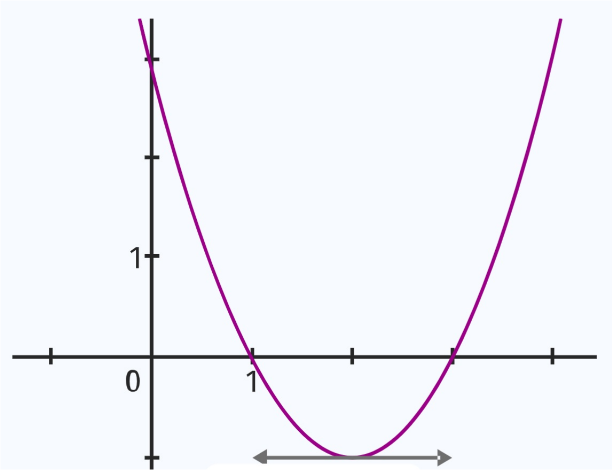
On note respectivement $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$.



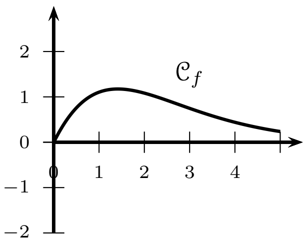




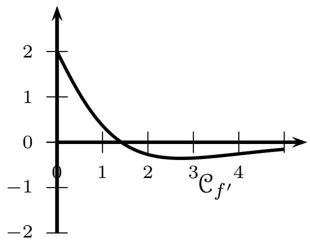
Des trois fonctions, laquelle a pour fonction dérivée une fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous ? Justifier.



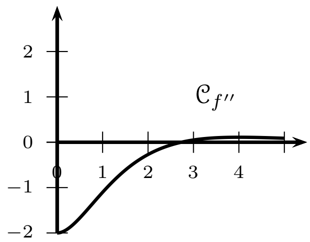
Exercice 5. (c) Lectures graphiques - D'après Bac (c)



Courbe $\mathcal{C}_f$



Courbe $\mathcal{C}_{f'}$



Courbe $\mathcal{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathcal{C}_{f'}$ et $\mathcal{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.
Les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.

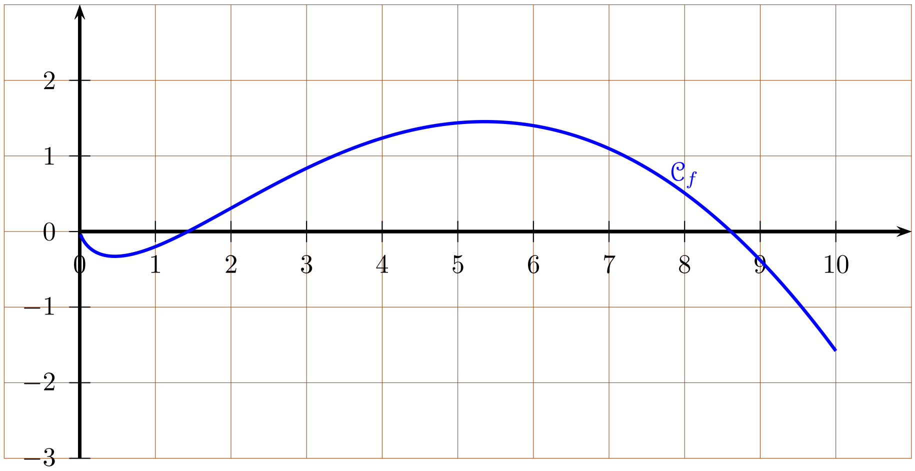
2. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

$y = x$ $\qquad$ $y = 2x + 1$ $\qquad$ $y = 2x$ $\qquad$ $y = \dfrac{3}{4}x$

3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : "La fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 5]$".

Exercice 6. (c) Lectures graphiques - QCM d'après Bac (c)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0; 10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul **b.** strictement positif **c.** strictement négatif

3. La fonction f' est :

a. croissante sur $]0; 10]$ **b.** croissante sur $[4; 7]$ **c.** décroissante sur $[4; 7]$

Partie II. Étudier les variations d'une fonction sur un intervalle donné

Méthode

L'idée est d'étudier le signe de la fonction dérivée sur l'intervalle de dérivation J , et d'en déduire les variations de la fonction sur son ensemble de définition I.

1. On repère bien sur quel intervalle I la fonction est définie.
2. On détermine rapidement l'ensemble de dérivabilité J (qui est souvent I en fait).
3. Pour tout x de J ... on dérive f.
4. Pour tout x de J ... on étudie le signe de la fonction dérivée f'. On s'intéresse surtout au cas où $f'(x)$ est nul, car cela nous donne les tangente horizontales
5. On dresse un tableau de signe de $f'(x)$ toujours pour tout x de J.
6. On en déduit les variations de f sur I.

Exercice 7. Fonctions polynômes

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 5x + 1$$

2. Étudier les variations de la fonction g définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

3. Soit la fonction h définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x + 1$$

3. a. Montrer que pour tout réel $x \in I$:

$$h'(x) = (x-4)(x+2)$$

3. b. Étudier les variations de h sur I.

4. Soit la fonction i définie sur $I = [-10\,;\,10]$ par

$$i(x) = 2x^3 - 3x^2 - 120x + 1$$

4. a. Montrer que pour tout réel $x \in I$:

$$i'(x) = 6(x-5)(x+4)$$

4. b. Étudier les variations de i sur I.

Réponses

(1.) f *décroissante sur* $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$ *et croissante sur* $\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$ *(2.)* g *croissante sur* $[0\,;\,+\infty]$.
(3.) h *décroissante sur* $[0\,;\,4]$ *et croissante sur* $[4\,;\,+\infty[$.
(4.) i *décroissante sur* $[-4\,;\,5]$ *et croissante sur* $[-10\,;\,-4] \cup [5\,;\,10]$.

Exercice 8. Une fonction dont la dérivée est de degré 3

Soit g la fonction définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + 10x$$

Remarque

La fonction g est de degré 4, la dérivée est de degré 3, on est bloqué.
On a alors besoin d'un coup de pouce.
Dans ce cas, on nous va nous donne la forme factorisée de g'.
ATTENTION : on dérive g, on obtient la forme développée de g' et on montre qu'elle correspond à la forme demandée avec RIGUEUR :

D'UNE PART .. D'AUTRE PART !

1. Vérifier que sur cet intervalle,
$$g'(x) = (x+1)(x-5)(x-2)$$
2. Étudier les variations de g sur I.

Réponses
La fonction g est croissante sur $[0\,;\,2] \cup [5\,;\,+\infty[$ *et décroissante sur* $[2\,;\,5]$.

Partie III. Résoudre des équations

Théorème des valeurs intermédiaires

Ces exercices utiliseraient normalement le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire qui sera vu en terminale.
Pour simplifier, si une fonction dérivable (même juste continue) est monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et passe d'une valeur positive à négative (ou le contraire), alors elle passe nécessairement par 0.
Elle prend même toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

Remarque *: Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

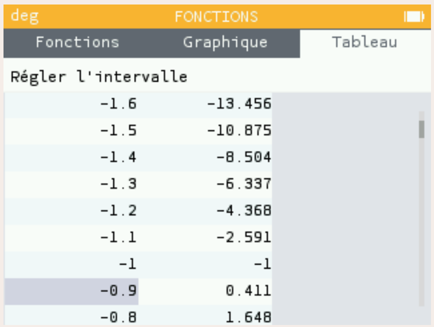
Exercice 9. (c) Approximation des racines d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,10]$ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Montrer que pour tout x de $[-2\,;\,10]$ on a :
$$f'(x) = 3x(x-4)$$
2. Étudier les variations de f sur $[-2\,;\,10]$.
3. Montrer juste à l'aide du tableau de variations que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions sur $[-2\,;\,10]$.
Une solution unique α sur cet $[-2\,;\,0]$, β sur cet $[0\,;\,4]$ et γ sur $[4\,;\,10]$.
4. Donner un encadrement à $0,01$ près de α,β et γ par balayage avec la calculatrice.

Aide

Commencer avec un pas de 0,1 puis affiner la recherche.
Pour α par exemple, dans le tableau de valeurs de la fonction f, fixer d'abord le pas d'incrémentation à 0,1 pour faire émerger rapidement les valeurs (-1) et $(-0,9)$.
Ensuite, modifier le pas d'incrémentation à 0,01 pour obtenir l'encadrement souhaité.



Exercice 10. Équation du 3e degré

Donner des encadrements au centième des solutions de l'équation

$$\frac{x^3}{3} + x^2 - 15x + 1 = 0$$

Aide

Poser $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 15x + 1$ puis reprendre la méthode de l'exercice précédent eb montrant que

$$f'(x) = (x - 3)(x + 5)$$

.

Partie IV. Résoudre des équations et Python

LINK : https://vu.fr/QLNww

Partie V. Résoudre des inéquations

Méthode

Très classique au bac.
On cherche à résoudre une inéquation du type :

$$u(x) \leqslant v(x)$$

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = u(x) - v(x)$$

2. On étudie le signe de f.
3. Si f est positive ou nulle sur I alors $u \geqslant v$ ce qui permet de conclure.

Exercice 11. Étude de signe et inégalité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 10$.

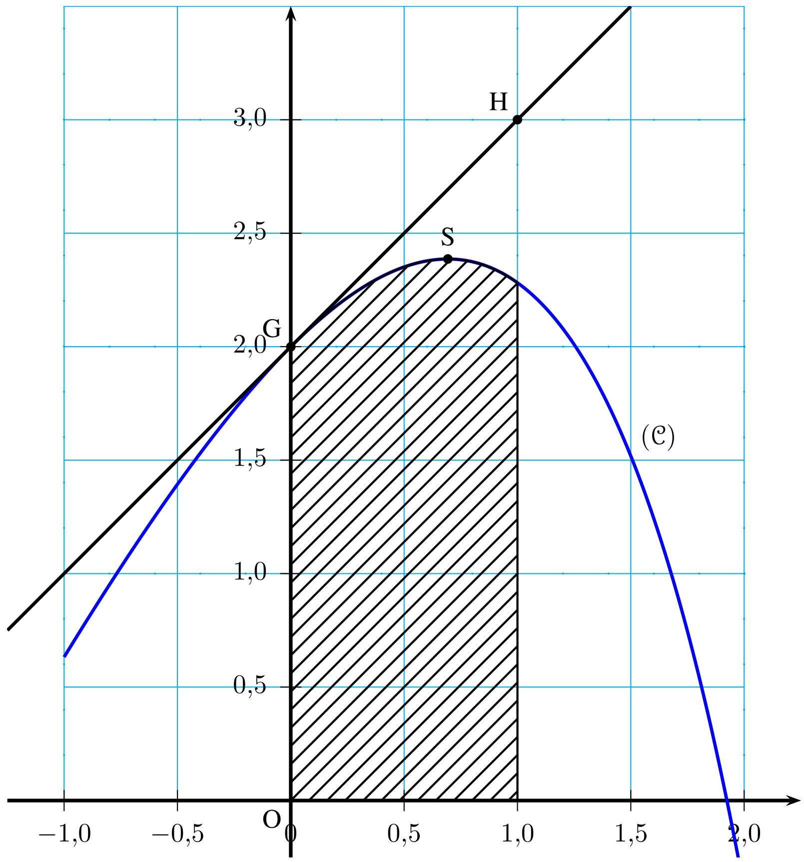
1. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $f(2) = 0$.
3. Donner le signe de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la résolution de l'inéquation $x^3 > 10 - x$.

Réponses
f est positive sur $[2\,;\,+\infty[$ et négative sinon. Donc $x^3 > 10 - x \iff f(x) > 0 \iff x \in]2\,;\,+\infty[$.

Partie VI. Bilan

Exercice 12. D'après Nouvelle Calédonie novembre 2014

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point G a pour coordonnées $(0 ; 2)$.
Le point H a pour coordonnées $(1 ; 3)$.
La droite (GH) est la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point G.
La courbe $(\mathcal{C})$ admet une tangente horizontale au point S d'abscisse $0,7$.
Le domaine hachuré est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie A

Dans cette partie aucune justification n'est demandée. Par lecture graphique :

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre sur $[-1\ ;\ 2]$ l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.
3. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique.

Réponses
(1.) $f(0) = 2$ *et* $f'(0) = 1$. *(2.)* $[0.7\,;2]$. *(3.)* *entre* 2 *et* 3 *unité d'aire.*

Exercice 13. D'après Polynésie juin 2014 (Exercice 2)

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour. On modélise le coût total de production par une fonction C. Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros. La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe.

Partie A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?

2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ? On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.

2. a. Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.

2. b. Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ » ?

Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

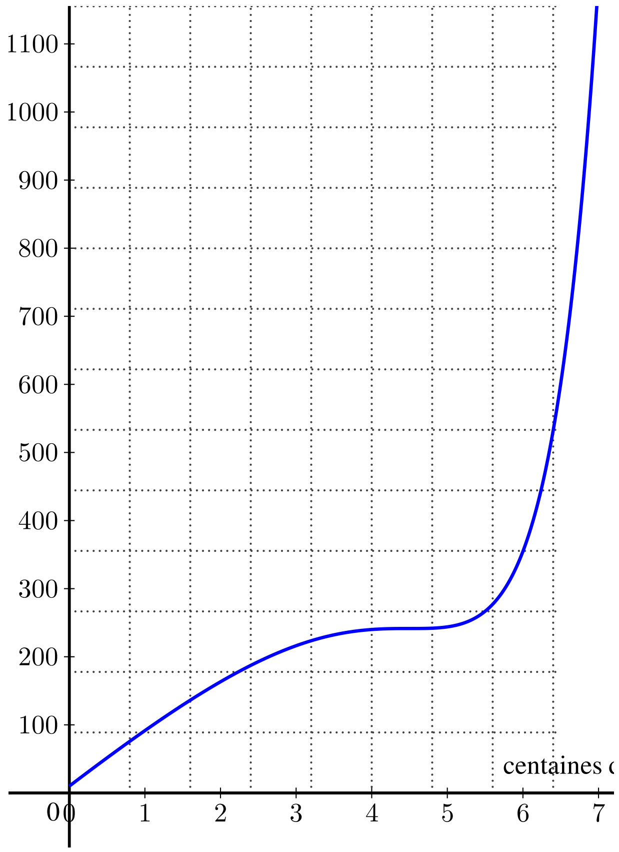
1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0\ ;\ 7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets. Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.

2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.

2. a. En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.

2. b. Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

ANNEXE de l'exercice 13



Réponses
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Partie VII. Devoir Maison

Exercice 14. Ex 51 du livre

51 En économie

Une usine de fabrication de voitures estime que le coût de production, en millier d'euros, de x voitures en une semaine est donnée par la fonction C définie par $C(x) = 0{,}1x^3 - 2{,}52x^2 + 26x + 2$.

Le coût marginal $C_m(x)$ représente le coût de production d'une unité supplémentaire quand on en a déjà produit x. On admet que $C_m(x)$ peut être approché par $C'(x)$.

1. Déterminer l'expression de $C_m(x)$.
2. En utilisant la dérivée de $C_m(x)$, déterminer la quantité pour laquelle le coût marginal est minimal.

Exercice 15. Ex 52 du livre

53

Suite à une épidémie dans une région, le nombre de personnes malades t jours après l'apparition des premiers cas est modélisé par $f(t) = 45t^2 - t^3 + 100$, pour tout t appartenant à $[0 ; 45]$.

1. Déterminer le nombre de personnes malades prévu par ce modèle au bout de 10 jours.
2. Montrer que, pour tout t appartenant à $[0 ; 45]$:
$$f'(t) = 3t(30 - t).$$
3. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; 45]$ et en déduire les variations de f.
4. Déterminer le jour où le nombre de personnes malades est maximal durant cette période de 45 jours et préciser le nombre de personnes alors malades.

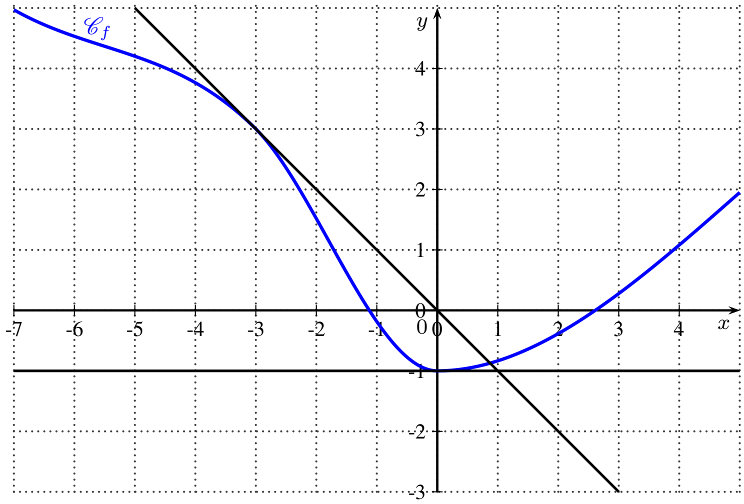
Fin du TD

Partie VIII. Correction

Correction de l'exercice 1 : Antilles juin 2016

Question 1

La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

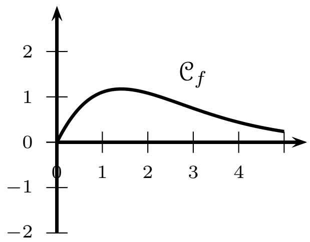
Question 1 (Réponse c)

a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

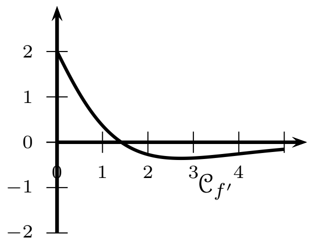
Preuve.

- Au point d'abscisse 0, la tangente est horizontale donc $f'(0) = 0$ ce qui exclu la réponse a.
- Au point d'abscisse -1, la tangente n'est pas horizontale donc $f'(-1) \neq 0$ ce qui exclu la réponse b.
- Au point d'abscisse -3, la tangente est de pente négative donc $f'(-3) < 0$ ce qui exclu la réponse d.
- La seule réponse possible à la question 1 est la réponse c.

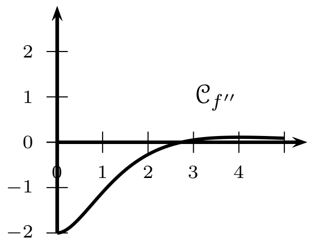
Correction de l'exercice 5



Courbe $\mathcal{C}_f$



Courbe $\mathcal{C}_{f'}$



Courbe $\mathcal{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathcal{C}_{f'}$ et $\mathcal{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.
Les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. **Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.**
   La fonction f semble atteindre son maximum en $x = m$ avec $\underline{1 < m < 2}$.
   La fonction dérivée f' s'annule entre 1 et 2 en changeant de signe, ce qui est la caractéristique d'un extremum local.

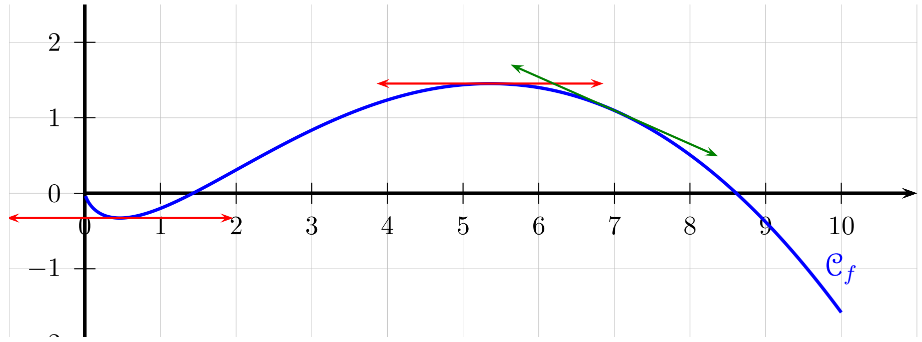
2. **Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?**
   a. $y = x$, **b.** $y = 2x + 1$, **c.** $y = 2x$, **d.** $y = \frac{3}{4}x$.

   - Sur la courbe $\mathcal{C}_{f'}$: l'image de 0 est 2 par f' soit $f'(0) = 2$;
   - Sur la courbe $\mathcal{C}_f$: l'image de 0 est 0 par f soit $f(0) = 0$;
   - Équation
     L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$ est
     $$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
     Donc ici on obtient :
     $$\left\{\begin{array}{ll} a & = 0 \\ f(0) & = +0 \\ f'(0) & = 2 \end{array}\right| \Rightarrow (T) : y = 2 \times (x - 0) + 0 \implies \boxed{y = 2x}$$

3. **Que pensez-vous de l'affirmation suivante : "La fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $[0 ; 5]$".**
   La fonction dérivée seconde f'' est visiblement positive sur $[3; 5]$ donc la fonction dérivée f' est croissante sur cet intervalle.

Correction de l'exercice 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Question 2 (Réponse b)

Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0 ; 10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 | $\boxed{\textbf{b.}\ 2}$ | **c.** 3

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Les solutions sur l'intervalle $]0 ; 10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ sont donc les abscisses des points de la courbe qui admettent une tangente horizontale. Ils sont au nombre de 2 car la courbe semble posséder deux tangentes horizontales sur cet intervalle (en rouge).

Question 3 (Réponse c)

Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul | **b.** strictement positif | $\boxed{\textbf{c.}\ \text{strictement négatif}}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Le nombre $f'(7)$ est donc négatif car la tangente à la courbe au point d'abscisse 7 semble être de coefficient directeur strictement négatif (en vert).

Question 4 (Réponse c)

La fonction f' est :

a. croissante sur $]0 ; 10]$ | **b.** croissante sur $[4 ; 7]$ | $\boxed{\textbf{c.}\ \text{décroissante sur } [4 ; 7]}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Sur l'intervalle $[4 ; 7]$, le coefficient directeur des tangentes à la courbe ont des coefficients directeurs de plus en plus petit, donc la fonction f' est bien décroissante sur cet intervalle.

Correction de l'exercice ?? : Antilles, Septembre 2014

Partie A

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros. On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\;;\;10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. **Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.**
La fonction polynôme C est définie et dérivable sur $[0\;;\;10]$. Pour tout réel x de cet intervalle on a :

$$C'(x) = -\frac{4}{48}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + 5 = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + 5$$

Donc

$$C_m(6) = C'(6) = -\frac{1}{12}6^3 + \frac{15}{16}6^2 + 5 = \frac{83}{4} = 20,75$$

Le coût marginal pour 600 paniers vendus est donc, exprimé en centaines d'euros : $\underline{C_m(6) = 20,75}$.

2. **On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a $C"(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$.**

2. a. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\;;\;a]$ inclus dans $[0\;;\;10]$ sur lequel la fonction C'' est positive.
On résout dans $]0\,;10]$ l'inéquation $C''(x) \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} C''(x) \geqslant 0 &\iff -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x \geqslant 0 \\ &\iff -2x^2 + 15x \geqslant 0 \;\; \text{(on a multiplier les 2 membres par 8)} \\ C''(x) \geqslant 0 &\iff x(-2x+15) \geqslant 0 \end{aligned}$$

La fonction $x \longrightarrow x(-2x+15)$ alors une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 7.5 \end{cases}$.

L'expression est alors du signe de $a = -2$ soit négative à l'extérieur des racines, et positive sur l'intervalle $[0\,;7,5]$.
Le plus grand intervalle de la forme $[0\,;a]$ dans lequel la fonction C'' est positive est donc $\underline{[0\,;7,5]}$.

2. b. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.
Pour $x > 7,5$, $C''(x) < 0$ donc C' est décroissante et le coût marginal C' diminue.

Partie B

On admet que l'entreprise produit entre 0 et 1 000 paniers de légumes (par mois) et que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier. La recette mensuelle R, exprimée en centaines d'euros, ainsi que la fonction C sont représentées par les courbes $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_C$ sur le graphique donné en annexe page **??**.

1. **Indiquer le nombre minimal de paniers que le producteur doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice. Donner une valeur approchée à la dizaine.**
Le producteur réalise un bénéfice quand la recette est supérieure au coût, autrement dit quand la courbe $\mathcal{C}_R$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_C$; cela se produit à partir de 70 paniers.

2. **Indiquer le bénéfice réalisé par le producteur s'il produit et vend 500 paniers dans le mois. Donner une valeur approchée à la centaine d'euros.**
Le bénéfice réalisé pour la vente de 500 paniers est de $R(5)-C(5)$ centaines d'euros soit à peu près $\underline{40 \times 100 = 4\,000 \text{ euros}}$.

3. **Le producteur peut-il espérer réaliser un bénéfice de 5 000 euros dans un mois ? Argumenter la réponse.**
Pour réaliser un bénéfice d'au moins 5 000 euros, il faut que l'écart entre R et C soit au moins de 50. En traçant la droite d, parallèle à la droite $\mathcal{C}_R$, il faudrait que la courbe $\mathcal{C}_C$ passe en-dessous de la droite d.

Ce n'est pas le cas donc le producteur ne peut pas espérer un bénéfice supérieur à 5 000 euros.

Correction de l'exercice 9 : Équation de degré 3

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,10]$ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Étudier les variations de f sur $[-2\,;\,10]$

Corrigé

f définie et dérivable sur $[-2\,;\,10]$ car c'est une fonction polynôme.

Pour tout réel x de $[-2\,;\,10]$ on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

Donc f' a deux racines évidentes, 0 et 4 et puisque le coefficient de x^2 est $3 > 0$ on a le tableau de signe suivant (positif à l'extérieur des racines)

x	-2	α	0	β	4	γ	10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-26	0	6	0	-26	0	406

2. Montrer juste à l'aide du tableau de variations que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions sur $[-2\,;\,10]$.

Une solution unique α sur cet $[-2\,;\,0]$, β sur cet $[0\,;\,4]$ et γ sur $[4\,;\,10]$.

Corrigé

x	-2	α	0	β	4	γ	10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-26	0	6	0	-26	0	406

- Sur $[-2\,;\,0]$ f est croissante et passe de (-26) à 6 donc elle passe nécessairement par 0 (si elle est continue) pour une valeur $x = \alpha \in]-2\,;\,0[$;
- Sur $[0\,;\,4]$ f est décroissante et passe de 6 à (-26) donc elle passe nécessairement par 0 (si elle est continue) pour une valeur $x = \beta \in]0\,;\,4[$;
- Sur $[4\,;\,10]$ f est croissante et passe de (-26) à 406 donc elle passe nécessairement par 0 (si elle est continue) pour une valeur $x = \gamma \in]4\,;\,10[$.

3. Donner un encadrement à $0,01$ près de α,β et γ par balayage avec la calculatrice.

Aide

Commencer avec un pas de 0,1 puis affiner la recherche.

Pour α par exemple, dans le tableau de valeurs de la fonction f, fixer d'abord le pas d'incrémentation à 0,1 pour faire émerger rapidement les valeurs (-1) et $(-0,9)$.

Ensuite, modifier le pas d'incrémentation à 0,01 pour obtenir l'encadrement souhaité.


deg FONCTIONS

Fonctions Graphique Tableau

Régler l'intervalle

-1.6	-13.456
-1.5	-10.875
-1.4	-8.504
-1.3	-6.337
-1.2	-4.368
-1.1	-2.591
-1	-1
-0.9	0.411
-0.8	1.648

Corrigé