Math93.com

TD 1 - Première Maths ENS
Suites

Les exercices dont l 'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Table des matières

Partie I. Définitions et modes de génération d'une suite

Exercice 1. Modélisation (c)

Modéliser chaque situation par une suite en précisant son premier terme u_0 et une relation de récurrence pour définir le terme général.

1. On débute avec 5. On construit une suite de nombres telle que chaque terme est égal à la somme de 5 et de l'inverse du terme précédent.
2. Un salaire initial est de 1 500 euros. Chaque année, il augmente de 0,1%.
3. La population initiale d'une ville est de 10 000 habitants. Chaque année, 80% des habitants restent et 500 nouvelles personnes arrivent.

Exercice 2. Calculons des termes à partir du terme général de la suite (c)

Soit u_n la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Comment calculer u_{50}.

Exercice 3. Calculons des termes à partir du terme général de la suite (c)

Pour chacune des suites suivantes définies pour tout entier naturel n, calculer les cinq premiers termes.

1. $u_n = 7n + 1$
2. $v_n = n^2 - 3n + 1$
3. $w_n = \dfrac{1}{2n-1}$
4. $t_n = \sqrt{5n+1}$

Exercice 4. Calculons des termes à partir d'une relation de récurrence de la suite (c)

Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence pour tout entier naturel n, calculer les quatre termes suivant le premier.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$

Exercice 5. Tableur

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E
1	n	0	1	2	3
2	u_n	-2	=3*C1^ 2+5*C1-2		
3					

1. Si on étend la formule de la case **C2** à la case **D2**, quelle est la valeur de u_2 ?
2. Exprimer le terme général u_n en fonction de n en utilisant la formule donnée par le tableur.

Exercice 6. Algorithme

On considère l'algorithme suivant :

```
# Dans l'éditeur Python
u = 0
for i in range(1,11):
        u = 2*i-1
```

1. Quelle sera la dernière valeur de u calculée par cet algorithme à la sortie de la boucle ?

2. On appelle (u_n) la suite associée aux valeurs calculées par l'algorithme.
Donner l'expression du terme général de cette suite.

Exercice 7. Exprimons u_{n+1} en fonction de n

Pour chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de n :

1. $u_n = 6n + 8$

2. $u_n = n^2 - 2n + 8$

3. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{n+2}$

4. $u_n = 5^n$

5. $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$

6. $u_n = \dfrac{9n-5}{4n+6}$

7. $u_n = \left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)^{n+1}$

Exercice 8. Calculatrice

Utiliser la calculatrice afin de faire afficher de la quatrième à la dixième valeur des deux suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = nu_n + 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - (n+2) \end{cases}$

Exercice 9. Tableur

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	=3* B2 +1
4	2	
5		

2.

	A	B
1	n	u_n
2	0	-1
3	1	= B2 + 2*A3
4	2	
5		

Pour chacune des feuilles de calcul, écrire la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 10. Algorithme

On considère l'algorithme ci-contre définissant une suite (u_n) et permettant de calculer un terme (à définir) de cette suite :

```
# Dans l'éditeur Python
u = 1
for i in range(1,11):
        u = (u - 1) / (u - 2)
```

1. Que calcule cet algorithme ?

2. Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

Exercice 11. A partir du terme général

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n - 3$.

1. Calculer u_0, u_1, u_3 et u_5.

2.

2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

2. b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

2. c. En déduire une définition de la suite (u_n) à l 'aide d 'une relation de récurrence.

Partie II. Étude des variations

Exercice 12. Étude des variations

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = 2n + 3$ pour tout $n \geqslant 0$.

2. $u_n = 3^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

3. $u_n = 0,5^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

4. $u_n = n^2$ pour tout $n \geqslant 0$.

5. $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 13. Étude des variations *

Étudier le sens de variation des suites suivantes en comparant u_{n+1} et u_n

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$.

Partie III. Suites arithmétiques

Théorème 1

Le terme général d'une suite arithmétique u de premier terme u_p et de raison r est pour $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Pour $p = 0$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Pour $p = 1$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

Exercice 14. Calculer un terme après avoir trouvé le terme général

Pour chacune des suites arithmétiques suivantes, déterminer le terme général puis calculer u_{20}.

1. La suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = 3$ et telle que $u_7 = 12$.

Remarque

Dans cet exemple, le premier terme de la suite est u_0 mais on ne connait que u_7.
On va appliquer la formule du cours avec $p = 7$.

2. La suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = 5$ et telle que $u_{25} = 17$.

3. La suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$.

4. La suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour $n \geqslant 1$ par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$.

Exercice 15. Déterminer si une suite est arithmétique

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$.

2. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = 2n + 3$.

3. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$.

Exercice 16. Variations

Déterminer le sens de variation des suites arithmétiques suivantes définies par :

1. $u_n = 4n - 2$ pour $n \in \mathbb{N}$;

2. $u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$ pour $n \in \mathbb{N}$;

3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour $n \geqslant 1$ par : $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$.

Exercice 17. Modéliser

Une famille décide d'épargner afin de pouvoir s'offrir un voyage en Égypte. La première année, elle économise 500 euros. Chaque année, elle augmente la somme épargnée de 100 euros.
Pour $n \geqslant 1$ on note s_n, la somme épargnée l'année n.

1. Déterminer s_1, s_2, s_3 et s_4.
2. Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.
3. En déduire la nature de la suite (s_n) puis son terme général.
4. Étudier la monotonie de la suite.
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer dans combien d'années la famille pourra partir en voyage sachant que le voyage coûte 4 200 euros.

Exercice 18. Modéliser

En 2017, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un artiste était de 9 000. On suppose que, chaque année, il obtient 1 500 fans supplémentaires. f_n désigne le nombre d'abonnés en $2017 + n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2018 et 2019.
2. Exprimer f_{n+1} en fonction de f_n.
3. Quelle est la nature de la suite ? En déduire une expression de f_n en fonction de n.
4. Existe-t-il une année pour laquelle le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à 2017 ? Si oui, laquelle ?

Partie IV. Suites géométriques

Théorème 2

Le terme général d'une suite géométrique u de premier terme u_p et de raison q est pour tout n entier, $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Pour $p = 0$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Pour $p = 1$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$$

Exercice 19. Calculer un terme après avoir trouvé le terme général

Pour chacune des suites géométriques suivantes, déterminer le terme général puis calculer u_{20}.

1. La suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 3$ et telle que $u_3 = 12$.

> **Remarque**
> Dans cet exemple, le premier terme de la suite est u_0 mais on ne connait que u_3.
> On va appliquer la formule du cours avec $p = 3$.

2. La suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = -2$ et telle que $u_{31} = 32$.
3. La suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$.
4. La suite géométrique $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour $n \geqslant 1$ par : $\begin{cases} u_1 = 2048 \\ u_{n+1} = \dfrac{-1}{2}u_n \end{cases}$.

Exercice 20. Déterminer si une suite est géométrique

Déterminer si les suites suivantes sont géométriques. Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$.
2. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = (-7)^n$.
3. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = 5n + 2^n$.
4. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 21. Variations

Déterminer le sens de variation des suites géométriques suivantes définies par :

1. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$.
2. Pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = (-7)^n$.
3. Pour tout entier n, la suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 0,5$.

Partie V. Bilan

Exercice 22. Suite arithmético-géométrique (c)

Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 1\,900 \\ u_{n+1} & = 1{,}02 \times u_n - 25 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 & \\ w_n & = u_n - 1\,250 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.
3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer (w_n) en fonction de n.
4. Démontrer que pour tout entier n on a : $u_n = 650 \times (1{,}02)^n + 1\,250$.

Exercice 23. Suite arithmético-géométrique (c)

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 20 \\ a_{n+1} & = 0{,}8 \times a_n + 3 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = a_n - 15 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.
2. Démontrer que la suite (b_n) est géométrique.
3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer (b_n) en fonction de n.
4. Démontrer que pour tout entier n on a : $a_n = 5 \times (0{,}8)^n + 15$.

Exercice 24. * D'après Bac - Asie - 2016 (c)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n). On a donc : $u_0 = 1000$.

1.
   - **1. a.** Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   - **1. b.** On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.
     Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   - **1. c.** On peut également utiliser l 'algorithme suivant pour répondre au problème de l 'entreprise. Recopier et compléter cet algorithme.

```
n ← 0
u ← 1 000
Tant que ... :
        u ← ...
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

   Proposer une fonction python qui réponds au problème.

2. À l 'aide de la calculatrice, vérifier la réponse au problème de l 'entreprise.

Partie VI. Python

Une liste : L

Une liste est une suite d'éléments numérotés dont le premier indice est 0. En Python, une liste s'écrit entre crochets [... , ..., ..., ...] avec les éléments séparés par des virgules.

- Le premier élément de la liste est L[0], le 2^{e} est L[1], ...
- Une liste peut être écrite de manière explicite : L = ["Lundi", "Mardi","Mercredi"]
- Sa longueur est donnée par $len(L)$.
- Si les éléments de la liste sont comparables, le max. est donné par *max(L)*, le min. par *min(L)*
- L=[] permet de définir une liste vide.
- Si L est une liste, l'instruction *L.append(x)* va ajouter l'élémentt [x] à la liste L.

```
# Par exemple
>>> maliste=[31,'salut',78,'bonjour',2022,'NSI']
>>> maliste[0]
31
>>> maliste[1]
'salut'
>>> maliste[5]
'NSI'
>>> len(maliste)
6
>>> maliste.append('toto')
>>> maliste
[31,'salut',78,'bonjour',2022,'NSI','toto']
```

Exercice 25. Des TD sur les suites

Faire le TD1 sur les suites de la page : https://www.math93.com/lycee/premiere-es/algorithmes-en-1es.html

Exercice 26. Voici les 3 exercices qu'il faut savoir faire

Compétences à maitriser

- Savoir écrire une fonction qui renvoie le terme d'indice n d'une suite définie par une relation de récurrence en utilisant une boucle while et une boucle range().
- Manipuler des listes
- Savoir écrire une fonction qui renvoie les termes d'indice 0 à n d'une suite dans une liste en utilisant une boucle while et une boucle range().
- Savoir écrire un algorithme de seuil.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 + n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction python $u(n)$ de paramètre n un entier et qui revoie le terme u_n de cette suite (*avec une boucle while et une boucle range()*).

2. Écrire une fonction python $termes\_u(n)$ de paramètre n un entier et qui revoie les termes u_0 à u_n de cette suite dans une liste (*avec une boucle while et une boucle range()*).

3. On admet que la suite u est croissante.
Écrire une fonction $seuil(M)$ de paramètre M et qui renvoie le rang du premier terme de la suite tel que $u_n \geqslant M$.

Réponses
https://vu.fr/Njfh

Partie VII. Corrections

Correction de l'exercice 1

Modéliser chaque situation par une suite en précisant son premier terme u_0 et une relation de récurrence pour définir le terme général.

1. On débute avec 5. On construit une suite de nombres telle que chaque terme est égal à la somme de 5 et de l'inverse du terme précédent.

Corrigé

La suite u est définie pour n entier par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 5 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

2. Un salaire initial est de 1 500 euros. Chaque année, il augmente de 0,1%.

Corrigé

La suite u est définie pour n entier par :

$$\begin{cases} u_0 = 1\,500 \\ u_{n+1} = (1 + 0,1\%)u_n = 1,001u_n \end{cases}$$

3. La population initiale d'une ville est de 10 000 habitants. Chaque année, 80% des habitants restent et 500 nouvelles personnes arrivent.

Corrigé

$$\begin{cases} u_0 = 10\,000 \\ u_{n+1} = 80\%u_n + 500 = 0,8u_n + 500 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 2

Soit u_n la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Corrigé

- $u_1 = 5u_0 - 3 = 5 \times 2 - 3 = 7$;
- $u_2 = 5u_1 - 3 = 5 \times 7 - 3 = 32$;
- $u_3 = 5u_2 - 3 = 5 \times 32 - 3 = 157$;

2. Comment calculer u_{50}.

Corrigé

Il faudrait calculer tous les termes précédents de u_0 à u_{49}.

Correction de l'exercice 3

Pour chacune des suites suivantes définies pour tout entier naturel n, calculer les cinq premiers termes.

1. $u_n = 7n + 1$

Corrigé

- $u_0 = 7 \times 0 + 1 = 1$;
- $u_1 = 7 \times 1 + 1 = 8$;
- $u_2 = 7 \times 2 + 1 = 15$;
- $u_3 = 7 \times 3 + 1 = 22$;
- $u_4 = 7 \times 4 + 1 = 29$;

2. $v_n = n^2 - 3n + 1$

Corrigé

- $v_0 = 0^2 - 3 \times 0 + 1 = 1$;
- $v_1 = 1^2 - 3 \times 1 + 1 = -1$;
- $v_2 = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = -1$;
- $v_3 = 3^2 - 3 \times 3 + 1 = 1$;
- $v_4 = 4^2 - 3 \times 4 + 1 = 5$;

3. $w_n = \dfrac{1}{2n - 1}$

Corrigé

- $w_0 = \dfrac{1}{2 \times 0 - 1} = -1$;
- $w_1 = \dfrac{1}{2 \times 1 - 1} = 1$;
- $w_2 = \dfrac{1}{2 \times 2 - 1} = \dfrac{1}{3}$;
- $w_3 = \dfrac{1}{2 \times 3 - 1} = \dfrac{1}{5}$;
- $w_4 = \dfrac{1}{2 \times 4 - 1} = \dfrac{1}{7}$;

4. $t_n = \sqrt{5n + 1}$

Corrigé

- $t_0 = \sqrt{5 \times 0 + 1} = \sqrt{1} = 1$;
- $t_1 = \sqrt{5 \times 1 + 1} = \sqrt{6}$;
- $t_2 = \sqrt{5 \times 2 + 1} = \sqrt{11}$;
- $t_3 = \sqrt{5 \times 3 + 1} = \sqrt{16} = 4$;
- $t_4 = \sqrt{5 \times 4 + 1} = \sqrt{21}$;

Correction de l'exercice 4

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Corrigé

- $u_1 = 2u_0 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$;
- $u_2 = 2u_1 + 1 = 2 \times 5 + 1 = 11$;
- $u_3 = 2u_2 + 1 = 2 \times 11 + 1 = 23$;
- $u_4 = 2u_3 + 1 = 2 \times 23 + 1 = 47$;

2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$

Corrigé

- $u_1 = u_0^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2$;
- $u_2 = u_1^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$;
- $u_3 = u_2^2 + 1 = 5^2 + 1 = 26$;
- $u_4 = u_3^2 + 1 = 26^2 + 1 = 677$;

3. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$

Corrigé

- $u_2 = \dfrac{1}{u_1 + 2} = \dfrac{1}{1 + 2} = \dfrac{1}{3}$;
- $u_3 = \dfrac{1}{u_2 + 2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3} + 2} = \dfrac{3}{7}$;
- $u_4 = \dfrac{1}{u_3 + 2} = \dfrac{1}{\dfrac{3}{7} + 2} = \dfrac{7}{17}$;
- $u_5 = \dfrac{1}{u_4 + 2} = \dfrac{1}{\dfrac{7}{17} + 2} = \dfrac{17}{41}$;

4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$

Corrigé

- $u_1 = \sqrt{u_0^2 + 1} = \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}$;
- $u_2 = \sqrt{u_1^2 + 1} = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1} = \sqrt{3}$;
- $u_3 = \sqrt{u_2^2 + 1} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = \sqrt{4} = 2$;
- $u_4 = \sqrt{u_3^2 + 1} = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}$;

Correction de l'exercice 22

Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 1\,900 \\ u_{n+1} & = 1{,}02 \times u_n - 25 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 & \\ w_n & = u_n - 1\,250 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.

$$u_0 = 1\,900\ ;\ u_1 = 1\,913\ ;\ u_2 = 1\,926{,}26 \quad \text{et} \quad w_0 = 650\ ;\ w_1 = 663\ ;\ w_2 = 676{,}26$$

2. Démontrer que la suite w est géométrique.

Pour tout entier n on a :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 1\,250$$
$$w_{n+1} = (1{,}02\, u_n - 25) - 1\,250$$
$$w_{n+1} = 1{,}02 \times u_n - 1\,275$$
$$w_{n+1} = 1{,}02 \times \left(u_n + \frac{-1\,275}{1{,}02} \right)$$
$$w_{n+1} = 1{,}02 \times (u_n - 1\,250)$$
$$w_{n+1} = 1{,}02 \times w_n$$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}02$, et de premier terme $w_0 = 650$ puisque :

$$w_0 = u_0 - 1\,250$$
$$w_0 = 1\,900 - 1\,250$$
$$w_0 = 650$$

Soit :

$$\boxed{(w_n) : \begin{cases} w_0 & = 650 \\ w_{n+1} & = 1{,}02 \times w_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer w_n en fonction de n.

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 1{,}02$, et de premier terme $w_0 = 650$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ w_n = w_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ w_n = 650 \times (1{,}02)^n}$$

4. Démontrer que pour tout entier n on a : $\boldsymbol{u_n = 650 \times (1{,}02)^n + 1\,250}$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$w_n = u_n - 1\,250$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = w_n + 1\,250$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 650 \times (1{,}02)^n + 1\,250}$$

Correction de l'exercice 23

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 20 \\ a_{n+1} & = 0{,}8 \times a_n + \ 3 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = a_n - 15 \end{cases}$$

1. **Calculer les trois premiers termes des deux suites.**

$$a_0 = 20\ ;\ a_1 = 19\ ;\ a_2 = 18{,}2 \quad \text{et} \quad b_0 = 5\ ;\ b_1 = 4\ ;\ b_2 = 3{,}2$$

2. **Démontrer que la suite b est géométrique**.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - 15 \\ b_{n+1} &= (0{,}8\, a_n + \ 3) \ - 15 \\ b_{n+1} &= 0{,}8 \times a_n - 12 \\ b_{n+1} &= 0{,}8 \times \left(a_n + \frac{-12}{0{,}8} \right) \\ b_{n+1} &= 0{,}8 \times (a_n - 15) \\ b_{n+1} &= 0{,}8 \times b_n \end{aligned}$$

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $b_0 = 5$ puisque :

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 - 15 \\ b_0 &= 20 - 15 \\ b_0 &= 5 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(b_n) : \begin{cases} b_0 & = 5 \\ b_{n+1} & = 0{,}8 \times b_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. **Soit n un nombre entier naturel, exprimer b_n en fonction de n.**

La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $b_0 = 5$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_n = b_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ b_n = 5 \times (0{,}8)^n}$$

4. **Démontrer que pour tout entier n on a : $\quad a_n = 5 \times (0{,}8)^n + \ 15$.**

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$b_n = a_n - 15$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = b_n + \ 15$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n = 5 \times (0{,}8)^n + \ 15}$$

Correction de l'exercice 24

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n). On a donc : $u_0 = 1000$.

1.

1. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Corrigé

On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1\,000$ puisque initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.

D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 10 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.
Donc, pour tout n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100 \\ u_0 = 1\,000 \end{cases}$$

1. b. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Corrigé

Pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 1,2\,u_n - 100 - u_n = 0,2\,u_n - 100$$

Or, pour tout entier n,

$$u_n \geqslant 1\,000 \Longrightarrow 0,2\,u_n \geqslant 200$$

et donc $0,2\,u_n - 100 \geqslant 100$

On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.

On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

1. c. On peut également utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème de l 'entreprise. Recopier et compléter cet algorithme.

```
n ← 0
u ← 1 000
Tant que ... :
        u ← ...
        n ← n + 1
Fin Tant que
```

Corrigé

Variables	u et n sont des nombres
Traitement	$u \leftarrow 1\,000$ $n \leftarrow 0$ Tant que $u \leqslant 30\,000$: $u \leftarrow 1,2 \times u - 100$ $n \leftarrow n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

Proposer une fonction python qui réponds au problème.

Corrigé

```
def seuil():
        u = 1000
        n = 0
        while u <= 30000:
                u = 1.2*u - 100
                n = n+1
        return n
```

2. À l'aide de la calculatrice, vérifier la réponse au problème de l'entreprise.

Corrigé

On obtient :

n	u_n
21	23502,55995
22	28103,07195
23	33623,68633

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries. Puisque la suite est croissante, on sait donc qu'elle atteindra son objectif le 23e jour.