Math93.com

TD 1 - 1re Spé Maths
Probabilités Conditionnelles

Partie I. Fréquences

Exercice 1.

Le tableau ci-dessous donne la répartition, en millier, des personnes au chômage en France en 2021.

	< 25 ans	25-49 ans	> 49 ans
Femmes	268	621	252
Hommes	306	634	285

1. Calculer la fréquence marginale des moins de 25 ans parmi les personnes au chômage.
2. Calculer la fréquence conditionnelle des personnes au chômage de moins de 25 ans parmi les femmes au chômage.
3. Calculer la fréquence conditionnelle des personnes au chômage de moins de 25 ans parmi les femmes au chômage.

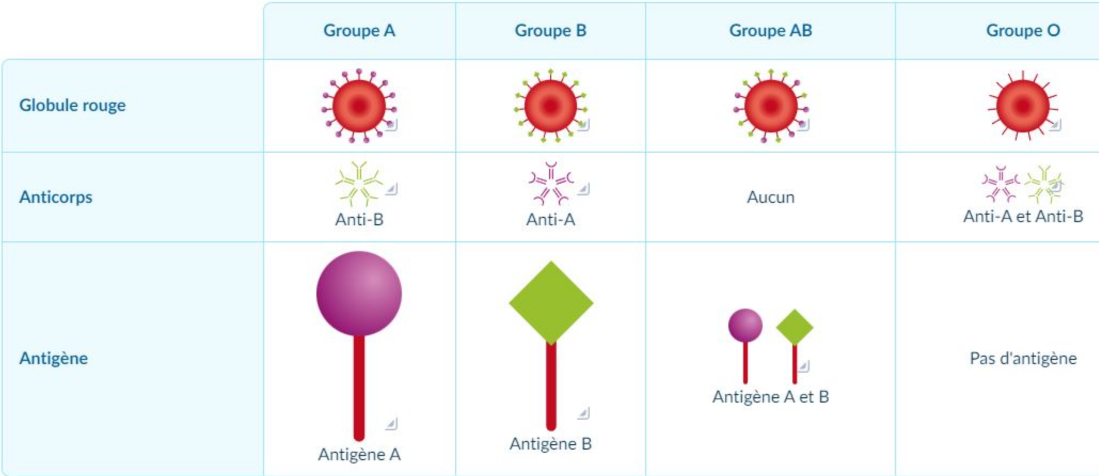
Partie II. Probabilités conditionnelles : première applications

Exercice 2. (c)

Dans une classe de première, 55 % des élèves sont des filles et 40 % des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

Exercice 3. svt

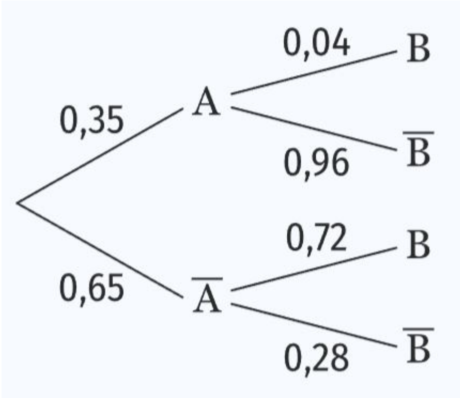
La composition du sang est identique pour tous les humains mais les antigènes présents sur les globules rouges varient d'un individu à l'autre. Il existe quatre groupes sanguins : le groupe A possède uniquement les antigènes A, le groupe B uniquement les B, le groupe AB a les deux types d'antigènes et, enfin, le groupe O se caractérise par l'absence de ces deux types d'antigènes.



On suppose que 44% des Français sont du groupe sanguin A et que 4% sont du groupe AB.
On choisit un Français au hasard. Si l'antigène A est trouvé dans son sang, quelle est la probabilité que ce Français soit du groupe A ?

Exercice 4.

On donne ci-dessous un arbre pondéré.



1. À quelle probabilité correspond chacune des pondérations apparaissant sur chaque branche ?
2. Calculer $P(A \cap B)$.
3. Calculer $P(B)$.

Exercice 5.

26 % des étudiants français suivent leurs études en Île-de-France. Les autres les suivent en province.
Parmi les étudiants d'Île-de-France, 51 % sont inscrits à l'université alors que 62 % des étudiants de province sont inscrits dans une université.
On choisit un étudiant français au hasard. On note :
F l'événement : « L'étudiant choisi est inscrit en Île-de-France » ;
U l'événement : « L'étudiant choisi est inscrit dans une université ».

1. Donner les valeurs de $P_F(U)$ et $P_{\overline{F}}(U)$
2. Faire un arbre.
3. Déterminer la probabilité que l'étudiant choisi soit inscrit en province. ?
4. Déterminer la probabilité que l'étudiant choisi soit inscrit dans une université de province.

Partie III. Indépendance

Exercice 6. (c)

Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0,8$, $P(B) = 0,35$ et $P(A \cap B) = 0,28$.

1. Montrer que A et B sont indépendants.

2. Déterminer $P(A \cup B)$ puis $P(\overline{A} \cup B)$.

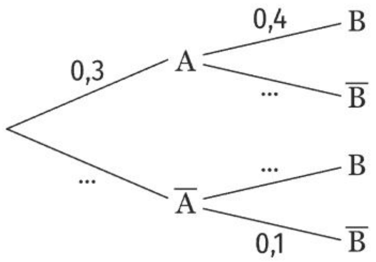
Exercice 7.

Dans un cinéma, 32 % des clients achètent des sucreries pour visionner leur film et 27 % des clients achètent des boissons. On observe que 5 % des clients achètent à la fois des sucreries et des boissons.
On choisit un client de ce cinéma au hasard. Les événements « Le client a acheté des sucreries » et « Le client a acheté une boisson » sont-ils indépendants ?

Partie IV. Formule des probabilités totales

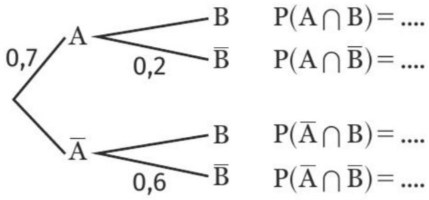
Exercice 8.

Après avoir complété l'arbre de probabilité ci-dessous, calculer $P(B)$ et $P_B(A)$.



Exercice 9. Formule des probabilités totales

On considère deux événements A et B dont les probabilités sont données dans l'arbre suivant.



1. Recopier et compléter l'arbre.

2. Calculer $P(B)$.

Exercice 10. Des fraudes (ex48) (c)

Un algorithme de détection de fraudes a été rédigé. Parmi toutes les fraudes, il en détecte 80%. Il détecte un problème sur 10% des dossiers étudiés et, parmi les cas qu'il détecte, 50% sont effectivement des fraudes.

1. Calculer la probabilité qu'un dossier soit déctecté et frauduleux.
2. En déduire la probabilité qu'un dossier soit frauduleux.

Partie V. Probabilités conditionnelles au bac

Exercice 11. Sujet 0 2021

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

- la formation avec *conduite accompagnée* ;
- la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

- 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée* ; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.
- 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle* ; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.
On considère les évènements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* » ;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation » ;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation » ;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

2.

2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

2. b. Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

2. c. La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* ?

Exercice 12. D'après Bac (c)

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

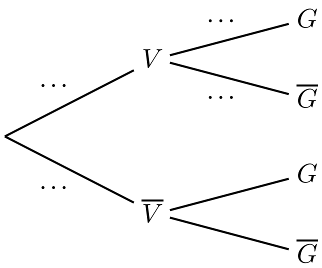
V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1.

1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.

1. b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Exercice 13. D'après Baccalauréat S Polynésie 4 septembre 2019 (c)

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...
Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie B (la partie A est pour la Tle)

Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet.

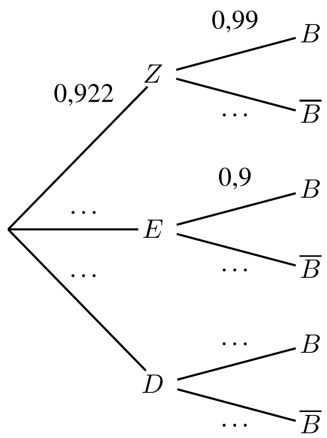
On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité.
Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut $0,922$;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut $0,075$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut $0,99$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut $0,9$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut $0,99$.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ; E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ; B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?

3. Calculer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 14. Baccalauréat S Liban 31 mai 2019

Chaque semaine, un agriculteur propose en vente directe à chacun de ses clients un panier de produits frais qui contient une seule bouteille de jus de fruits. Dans un esprit de développement durable, il fait le choix de bouteilles en verre incassable et demande à ce que chaque semaine, le client rapporte sa bouteille vide.
On suppose que le nombre de clients de l'agriculteur reste constant.
Une étude statistique réalisée donne les résultats suivants :

- à l'issue de la première semaine, la probabilité qu'un client rapporte la bouteille de son panier est $0,9$;
- si le client a rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,95$;
- si le client n'a pas rapporté la bouteille de son panier une semaine, alors la probabilité qu'il ramène la bouteille du panier la semaine suivante est $0,2$.

On choisit au hasard un client parmi la clientèle de l'agriculteur. Pour tout entier naturel n non nul, on note R_n l'évènement « le client rapporte la bouteille de son panier de la n-ième semaine ».

1.

1. a. Modéliser la situation étudiée pour les deux premières semaines à l'aide d'un arbre pondéré qui fera intervenir les évènements R_1 et R_2.

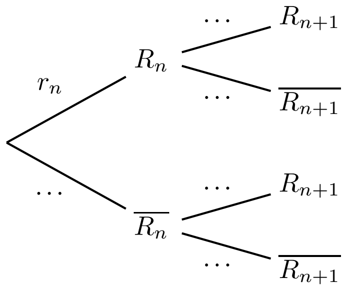
1. b. Déterminer la probabilité que le client rapporte ses bouteilles des paniers de la première et de la deuxième semaine.

1. c. Montrer que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la deuxième semaine est égale à $0,875$.

1. d. Sachant que le client a rapporté la bouteille de son panier de la deuxième semaine, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas rapporté la bouteille de son panier de la première semaine ?
On arrondira le résultat à 10^{-3}.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note r_n la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la n-ième semaine. On a alors $r_n = p\left(R_n\right)$.

2. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré (aucune justification n'est attendue) :



2. b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$r_{n+1} = 0,75 r_n + 0,2$$

Question Bonus

3. (Pour la Terminale) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$$

4. [Pour la Terminale] Calculer la limite de la suite (r_n). Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 15. Baccalauréat S Antilles-Guyane 18 juin 2019

Lors d'une soirée, une chaîne de télévision a retransmis un match. Cette chaîne a ensuite proposé une émission d'analyse de ce match.
On dispose des informations suivantes :

- 56 % des téléspectateurs ont regardé le match ;
- un quart des téléspectateurs ayant regardé le match ont aussi regardé l'émission ;
- 16,2 % des téléspectateurs ont regardé l'émission.

On interroge au hasard un téléspectateur. On note les évènements :

- M : « le téléspectateur a regardé le match » et E : « le téléspectateur a regardé l'émission ».

On note x la probabilité qu'un téléspectateur ait regardé l'émission sachant qu'il n'a pas regardé le match.

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.

2. Déterminer la probabilité de $M \cap E$.

3.

3. a. Vérifier que $p(E) = 0,44x + 0,14$.

3. b. En déduire la valeur de x.

4. Le téléspectateur interrogé n'a pas regardé l'émission. Quelle est la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'il ait regardé le match ?

Réponses

Le corrigé complet sur www.math93.com

Exercice 16. Baccalauréat S Asie 20 juin 2019 (c)

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats au **millième**.
En France, la consommation de produits bio croît depuis plusieurs années.
En 2017, le pays comptait 52 % de femmes. Cette même année, 92 % des Français avaient déjà consommé des produits bio.
De plus, parmi les consommateurs de produits bio, 55 % étaient des femmes.
On choisit au hasard une personne dans le fichier des Français de 2017. On note :

- F l'évènement « la personne choisie est une femme » ;
- H l'évènement « la personne choisie est un homme » ;
- B l'évènement « la personne choisie a déjà consommé des produits bio ».

1. Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements F et B.

2.

2. a. Montrer que $P(F \cap B) = 0,506$.

2. b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.

3. Calculer $P_H\left(\overline{B}\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 17. Baccalauréat S Antilles-Guyane 9 septembre 2019 (c)

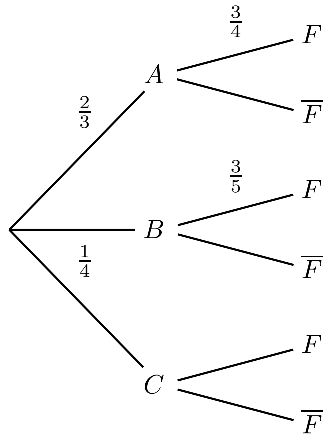
Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :

- un panier de petite taille ;
- un panier de taille moyenne ;
- un panier de grande taille.

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.

1. a. Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs frais.

1. b. Calculer $P\left(B \cap \overline{F}\right)$, puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.

1. c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à $0,6$. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?

2. Dans cette question, on suppose que $P(F) = 0,675$.

2. a. Démontrer que la probabilité conditionnelle de F sachant C, notée $P_C(F)$, est égale à $0,3$.

2. b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille ? Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Partie VI. Compléments

Exercice 18. La grippe (ex.65) (c)

Lorsqu'elle est exposée au virus de la grippe, une personne peut développer la grippe. Quand elle est vaccinée, la personne exposée ne développe pas la maladie avec une probabilité égale à α. α s'appelle l'efficacité du vaccin.
De plus, on constate que, parmi les personnes exposées, 20% ne sont ni vaccinées, nin malades.
Cette année, la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée est égale à 0,4.

1. Exprimer, en fonction de α la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée et ne soit pas malade.

2. Exprimer, en fonction de α la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée et malade.

3. Pour quelle valeur de α la proportion de personnes exposées qui ne sont pas malades est égale à 50% ?

Exercice 19. Test positif (ex 88)

Votre ami vient de passer les tests de dépistage d'une maladie rare et incurable qui touche une personne sur 100 000. Malheureusement, le test est positif. Espérant une erreur de diagnostic, votre ami a demandé quelle était la probabilité d'une erreur : le spécialiste lui a répondu que, pour 99% des malades, le résultat est positif, alors que, pour 99,9% des personnes saines, le résultat est négatif.
De manière surprenante, vous réussissez à utiliser ces données pour remonter le moral de votre ami.
Soient M et T les événements :

- M : « la personne est malade »
- T : « le test est positif »

1. Construire un arbre pondéré modélisant l'expérience.

2. Déterminer la probabilité qu'une personne choisie ait un test positif.

3. Déterminer la probabilité qu'une personne soit malade, sachant que le test est positif.

4. Rassurer votre ami.

Partie VII. Corrections

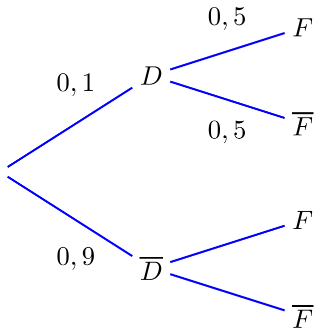
Correction de l'exercice 2 page 2

Soient F l'événement : « L'élève est une fille » et D l'événement : « L'élève est demi-pensionnaire ».
On a $P(F) = 0{,}55$ et $P(F \cap D) = 0{,}4$.
On en déduit la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille :
$$P_F(D) = \frac{P(F \cap D)}{P(F)} = \frac{0{,}4}{0{,}55} = \frac{8}{11} \approx 0{,}73.$$

Correction de l'exercice 10 page 9

Un algorithme de détection de fraudes a été rédigé. Parmi toutes les fraudes, il en détecte 80%. Il détecte un problème sur 10% des dossiers étudiés et, parmi les cas qu'il détecte, 50% sont effectivement des fraudes.

1. Calculer la probabilité qu'un dossier soit déctecté et frauduleux.



D : « l'algorithme détecte un problème »
F : « le dossier est frauduleux »
$P(D) = 0,1$; $P_D(F) = 0,5$; $P_F(D) = 0,8$

$P(F \cap D) = P(D) \times P_D(F) = 0,1 \times 0,5 = 0,05$

2. En déduire la probabilité qu'un dossier soit frauduleux.

On cherche $P(F)$. On connaît $P_F(D) = 0,8$.
Or $P_F(D) = \dfrac{P(F \cap D)}{P(F)}$ donc $P(F) = \dfrac{P(F \cap D)}{P_F(D)} = \dfrac{0,05}{0,8} = \dfrac{1}{16}$

Correction de l'exercice 6 page 6

Méthode

1. Pour démontrer que des événements A et B sont indépendants, on vérifie que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ et $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B})$ sont égaux.

2.

- On utilise la formule apprise en seconde reliant les événements $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.
- On utilise la propriété du cours pour calculer $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$et $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$.

Solution

1. $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0{,}28 = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$ donc A et B sont indépendants.

2. On sait que $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
donc $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) + \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) = 0{,}87$.
A et B sont indépendants donc $\overline{\mathrm{A}}$ et B le sont aussi.
De ce fait : $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B}) = (1 - 0{,}8) \times 0{,}35 = 0{,}07$.

Correction de l'exercice 12 page 11

Le virus de la grippe atteint chaque année, en période hivernale, une partie de la population d'une ville.
La vaccination contre la grippe est possible ; elle doit être renouvelée chaque année.

Partie A

L'efficacité du vaccin contre la grippe peut être diminuée en fonction des caractéristiques individuelles des personnes vaccinées, ou en raison du vaccin, qui n'est pas toujours totalement adapté aux souches du virus qui circulent. Il est donc possible de contracter la grippe tout en étant vacciné.
Une étude menée dans la population de la ville à l'issue de la période hivernale a permis de constater que :

- 40 % de la population est vaccinée ;
- 8 % des personnes vaccinées ont contracté la grippe ;
- 20 % de la population a contracté la grippe.

On choisit une personne au hasard dans la population de la ville et on considère les évènements :

V : « la personne est vaccinée contre la grippe » ;

G : « la personne a contracté la grippe ».

1.

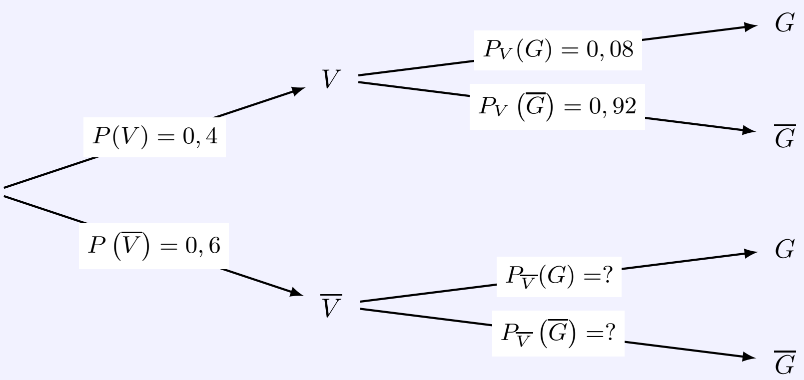
1. a. Donner la probabilité de l'évènement G.

Corrigé

20% de la population a contracté la grippe donc $\underline{P(G) = 0,2}$.

1. b. Reproduire l'arbre pondéré ci-dessous et compléter les pointillés indiqués sur quatre de ses branches.

Corrigé



2. Déterminer la probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée.

Corrigé

La probabilité que la personne choisie ait contracté la grippe et soit vaccinée est :

$$P(G \cap V) = 0,4 \times 0,08 = \underline{0,032}$$

3. La personne choisie n'est pas vaccinée. Montrer que la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à $0,28$.

Corrigé

Sachant que la personne choisie n'est pas vaccinée, la probabilité qu'elle ait contracté la grippe est d'après la formule de Bayes :

$$P_{\overline{V}}(G) = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{P\left(\overline{V} \cap G\right)}{0,6}$$

- <u>Calculons $P\left(\overline{V} \cap G\right)$.</u>

  Les évènement V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totales on a :

  $$P(G) = P(G \cap V) + P\left(\overline{V} \cap G\right) \iff 0,2 = 0,032 + P\left(\overline{V} \cap G\right)$$

  Donc

  $$P\left(\overline{V} \cap G\right) = 0,2 - 0,032 = \underline{0,168}$$

- <u>Conclusion</u> :

  $$P_{\overline{V}}(G) = \frac{0,168}{0,6} = \underline{0,28}$$

  La personne choisie n'est pas vaccinée. La probabilité qu'elle ait contracté la grippe est égale à 0,28

Remarque historique

Thomas Bayes $(1702 - 1761)$ est un mathématicien britannique et pasteur de l'Église presbytérienne, connu pour avoir formulé le théorème de Bayes.

Correction de l'exercice 13 page 12 : polynésie sept. 2019

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront précisées à 10^{-4} près.

Lors d'une communication électronique, tout échange d'information se fait par l'envoi d'une suite de 0 ou de 1, appelés bits, et cela par le biais d'un canal qui est généralement un câble électrique, des ondes radio, ...
Une suite de 8 bits est appelé un octet. Par exemple, 10010110 est un octet.

Partie B

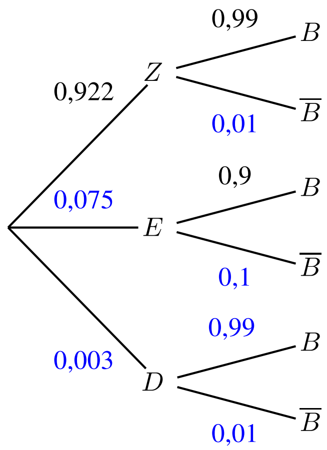
Afin de détecter si un ou plusieurs bits de l'octet sont mal transmis, on utilise un protocole de détection d'erreur. Il consiste à ajouter, à la fin de l'octet à transmettre, un bit, appelé bit de parité et qui est transmis après les huit bits de l'octet. On s'intéresse désormais à la transmission de l'octet suivi de son bit de parité. Une étude statistique a permis d'obtenir que :

- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis sans erreur vaut $0,922$;
- la probabilité que les huit bits (octet) soient transmis avec exactement une erreur vaut $0,075$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis sans erreur, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut $0,99$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec exactement une erreur, la probabilité que le bit de parité ait été envoyé sans erreur vaut $0,9$;
- si les huit bits (octet) ont été transmis avec au moins deux erreurs, la probabilité que le bit de parité soit envoyé sans erreur vaut $0,99$.

On choisit au hasard un octet suivi de son bit de parité. On considère les évènements suivants :

- Z : « les huit bits de l'octet sont transmis avec aucune erreur » ;
- E : « les huit bits de l'octet sont transmis avec exactement une erreur » ;
- D : « les huit bits de l'octet sont transmis avec au moins deux erreurs » ;
- B : « le bit de parité est transmis sans erreur ».

1. Compléter l'arbre pondéré de l'annexe 1 à rendre avec la copie.



2. Quelle est la probabilité que l'octet soit transmis avec une erreur exactement et que le bit de parité soit transmis sans erreur ?
La probabilité demandée est

$$P(E \cap B) = P(E) \times P_E(B) = 0,075 \times 0,9 = \underline{0{,}067\,5}$$

3. Calculer la probabilité de l'évènement B.
D'après la loi des probabilités totales, puisque les évènement Z, E et D forment une partition de l'univers :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(Z \cap B) + P(E \cap B) + P(D \cap B) \\ &= 0,922 \times 0,99 + 0,074 \times 0,9 + 0,003 \times 0,99 = \underline{0{,}983\,25} \end{aligned}$$

soit $\boxed{P(B) = 0{,}983\,3}$ à 10^{-4} près.

Correction de l'exercice 16 page 15 : Asie 2019

1. **Traduire les données numériques de l'énoncé à l'aide des évènements F et B.**
Traduction des données :
$$\boxed{P(F) = 0,52}\ ;\ \boxed{P(B) = 0,92}\ ;\ \boxed{P_B(F) = 0,55}.$$

2.

2. a. Montrer que $P(F \cap B) = 0,506$.
On a :
$$P(F \cap B) = P_B(F) \times P(B) = 0,55 \times 0,92 = 0,506$$

2. b. En déduire la probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme.
On en déduit :
$$P_F(B) = \frac{P(F \cap B)}{P(F)} = \frac{0,506}{0,52} \approx \boxed{0,973}$$
La probabilité qu'une personne ait consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est une femme vaut environ 0,973.

3. **Calculer $P_H\left(\overline{B}\right)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.**
Les évènement F et H forment une partition de l'univers, donc d'après la formule des probabilités totale :
$$P(B) = P(B \cap F) + P(B \cap H)$$
donc
$$P(B \cap H) = P(B) - P(B \cap F) = 0,92 - 0,506 = 0,414$$
On a
$$P_H(B) = \frac{P(B \cap H)}{P(H)} = \frac{0,414}{0,48}$$
donc
$$P_H\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{0,414}{0,48} = \boxed{0{,}137\,5}$$
La probabilité qu'une personne n'ait pas consommé des produits bio en 2017, sachant que c'est un homme vaut environ 0,1375.

Correction de l'exercice 17 page 16 : Antilles septembre 2019

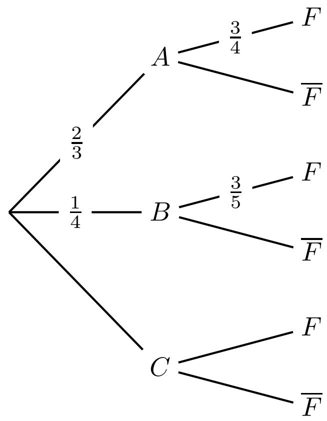
Une association offre à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier : un panier de petite taille, un panier de taille moyenne, et un panier de grande taille.

Partie A

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d' ?ufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- A : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- B : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- C : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d' ?ufs frais ».

On dispose de certaines données, qui sont résumées dans l'arbre ci-dessous :



1. Dans cette question, on ne cherchera pas à compléter l'arbre.

1. a. « L'adhérent choisit un panier de petite taille et est intéressé par une livraison d' ?ufs frais. » est l'événement $A \cap F$:

$$P(A \cap F) = P(A) \times P_A(F) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

1. b. on a :

$$P\left(B \cap \overline{F}\right) = P(B) \times P_B\left(\overline{B}\right) = P(B) \times (1 - P_B(B)) = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{10}$$

La probabilité que l'adhérent choisisse un panier de taille moyenne et qu'il ne soit pas intéressé par une livraison d' ?ufs frais est égale à $\frac{1}{10}$.

1. c. La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à $0,6$. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?
D'après la formule des probabilités totales, puisque les évènements A, B et C forment une partition de l'univers :

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A \cap F) + P(B \cap F) + P(C \cap F) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{5} + P(C \cap F) \\ &= 0,65 + P(C \cap F) \geqslant 0,65 \end{aligned}$$

Donc $P(F) \geqslant 0,65$, donc la livraison d'œufs frais sera mise en place.

2. Dans cette question, on suppose que $P(F) = 0,675$.

2. a. $P_C(F) = \dfrac{P(F \cap C)}{P(C)}$

- $P(C \cap F) = P(F) - (P(A \cap F) + P(B \cap F)) = 0,675 - 0,65 = 0,025$
- $P(C) = 1 - \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

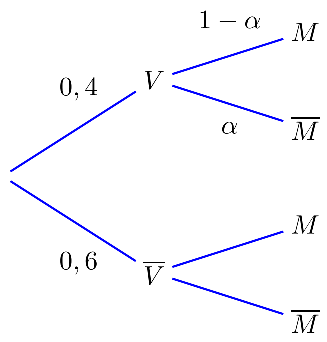
$$P_C(F) = \frac{P(F \cap C)}{P(C)} = \frac{0,025}{\frac{1}{12}} = 12 \times 0,025 = \underline{0,3}$$

2. b. L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d' ?ufs frais. La probabilité qu'il ait choisi un panier de grande taille est

$$P_F(C) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{0,025}{0,675} \approx \underline{0,04}$$

section*Correction de l'exercice 18 page 17 Lorsqu'elle est exposée au virus de la grippe, une personne peut développer la grippe. Quand elle est vaccinée, la personne exposée ne développe pas la maladie avec une probabilité égale à α. α s'appelle l'efficacité du vaccin.
De plus, on constate que, parmi les personnes exposées, 20% ne sont ni vaccinées, nin malades.
Cette année, la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée est égale à 0,4.

1. Exprimer, en fonction de α la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée et ne soit pas malade.



V : « la personne est vaccinée »
M : « la personne est malade »

$P(\overline{V} \cap \overline{M}) = 0,2$
On cherche :

$$P(\overline{M} \cap V) = P(V) \times P_V(\overline{M}) = 0,4\alpha$$

2. Exprimer, en fonction de α la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée et malade.

$$P(V \cap M) = P(V) \times P_V(M) = 0,4(1-\alpha)$$

3. Pour quelle valeur de α la proportion de personnes exposées qui ne sont pas malades est égale à 50% ?

On veut que $P(\overline{M}) = 0,5$.
Les évènement V et $\overline{V}$ forment une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(\overline{M}) &= P(\overline{M} \cap V) + P(\overline{M} \cap \overline{V}) \\ &= 0,4\alpha + 0,2 \end{aligned}$$

Donc

$$0,4\alpha + 0,2 = 0,5$$

soit $0,4\alpha = 0,3$. Donc

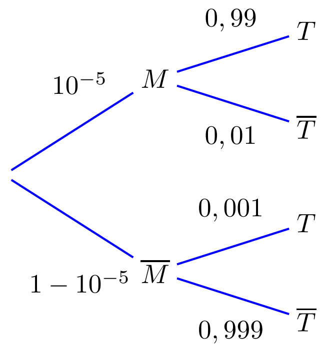
$$\alpha = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4}$$

Correction de l'exercice 19 page 18

Votre ami vient de passer les tests de dépistage d'une maladie rare et incurable qui touche une personne sur 100 000. Malheureusement, le test est positif. Espérant une erreur de diagnostic, votre ami a demandé quelle était la probabilité d'une erreur : le spécialiste lui a répondu que, pour 99% des malades, le résultat est positif, alors que, pour 99,9% des personnes saines, le résultat est négatif.
De manière surprenante, vous réussissez à utiliser ces données pour remonter le moral de votre ami.
Soient M et T les événements :

- M : « la personne est malade »
- T : « le test est positif »

1. Construire un arbre pondéreé modélisant l'expérience.



$P(M)=\dfrac{1}{100000}=10^{-5}$; $P_M(T)=0,99$; $P_{\overline{M}}(\overline{T})=0,999$

2. Déterminer la probabilité qu'une personne choisie ait un test positif.

On cherche $P(T)$.
D'après la loi des probabilités totales puisque M et $\overline{M}$ forment une partition de l'univers :

$$\begin{array}{rcl} P(T) & = & P(T\cap M)+P(T\cap\overline{M}) \\ & = & P(M)\times P_M(T)+P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(T)) \\ & = & 10^{-5}\times 0,99+(1-10^{-5})\times 0,001 \\ & = & 0,00100989 \end{array}$$

3. Déterminer la probabilité qu'une personne soit malade, sachant que le test est positif.

$P_T(M)=\dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0,99\times 10^{-5}}{0,00100989}\approx 0,01=1\,\%$

4. Rassurer votre ami.

Il n'y a que 1 % de chance que l'ami soit malade bien que le test soit positif.