Math93.com

Devoir Surveillé n°2A (Correction)

1re Spé Maths

Suites

Durée 66 min - Coeff. 1.5

Noté sur 20.5 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Variations et majorants, minorants — 4.5 points

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2}$$

1. Calculer les 3 premiers termes de la suite.

Corrigé (0.75 pt)

On obtient facilement :

$$u_0 = \frac{1}{2} \; ; \; u_1 = \frac{2}{3} \; ; \; u_2 = \frac{3}{4}$$

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Corrigé(2.5 points)

Pour tout entier naturel n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{n^2+4n+4-n^2-4n-3}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

Or puisque n est positif ou nul, le dénominateur est strictement positif et $u_{n+1} - u_n > 0$.

La suite (u_n) est strictement croissante.

3. Montrer que la suite (u_n) est bornée.

Corrigé (1.25 point)

- La suite (u_n) est croissante donc minorée par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$.
- Pour tout entier naturel n, on a $n+1 < n+2$ et puisque $n+2$ est positif :

$$u_n = \frac{n+1}{n+2} < 1$$

La suite (u_n) est donc bornée par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et 1.

Exercice 2. Deux modélisations d'une évolution de population — 16 points

Un certain type de poissons se reproduit rapidement dans un étang.
Chaque mois, la population de poissons augmente de 30% et 15 poissons sont enlevés de l'étang par les scientifiques. Au départ, il y a 80 poissons.

Problématique : Les scientifique cherchent à déterminer à partir de quel mois le nombre de poissons dépassera 500, seuil au delà duquel l'écosystème est menacé.

Partie 1

Un premier groupe de scientifiques modélise l'évolution de la population de poissons par la suite (u_n) où u_n est le nombre de poissons après n mois. On a donc $u_0 = 80$.

1. Montrer que pour tout n entier on a :

$$u_{n+1} = 1,3u_n - 15$$

Corrigé (0.5 point)

u_n est le nombre de poissons après n jours. On a donc $u_0 = 80$. Chaque jour, la population de poissons augmente de 30%, ce qui revient à multiplier par 1,3 et 15 nouveaux poissons sont enlevés de l'étang donc on a bien $u_{n+1} = 1,3u_n - 15$.

2. Calculer en détaillant les calculs u_1 et u_2.

Corrigé (1 point)

- Pour $n = 0$ on obtient dans la relation de récurrence :

$$u_{0+1} = u_1 = 1,3u_0 - 15 = 1,3 \times 80 - 15 = 104 - 15 = 89$$

- Pour $n = 2$ on obtient dans la relation de récurrence :

$$u_{0+1} = u_2 = 1,3u_1 - 15 = 1,3 \times 88 - 15 = 100,7$$

3. Compléter la fonction python suivante $terme\_u$ de paramètre n pour quelle renvoie le terme d'indice n de la suite (u_n).

```
# Corrigé ( 1 pt)
def terme_u(n):
    u = 80
    for i in range(n):
       u = 1.3*u - 15
    return u
```

4. On admet que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 75$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Corrigé (2 points)

Pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 1,3\,u_n - 15 - u_n = 0,3\,u_n - 15$$

Or, pour tout entier n,

$$u_n \geqslant 75 \Longrightarrow 0,3\,u_n \geqslant 22,5$$

et donc

$$0,3\,u_n - 15 \geqslant 7,5 > 0$$

On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.
On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

5. On veut utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème de l 'entreprise.
Compléter cet algorithme.

Corrigé (1.5 point)

On obtient avec la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 80 \\ u_{n+1} = 1,3u_n - 15 \end{cases}$$

et avec le seuil de 500 puisque :
Problématique : Les scientifique cherchent à déterminer à partir de quel mois le nombre de poissons dépassera 500, seuil au delà duquel l'écosystème est menacé.

```
def seuil():
        u = 80
        n = 0
        while u <= 500 :
                u = 1.3*u - 15
                n = n + 1
        return n
```

6. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse au problème des scientifiques en expliquant votre raisonnement avec rigueur (il faut donner 2 valeurs de la suite, l'une avant le seuil, l'autre après).

Corrigé (1 point)

On obtient :

n	u_n
10	$463.6 < 500$
11	$587.6 > 500$

Donc le seuil de 500 est dépassé pour $n = 11$ soit après 11 mois.

7. Que va renvoyer la fonction $seuil()$?

Corrigé (0,5 point)

La fonction $seuil()$ va renvoyer 11.

Partie 2

Un autre groupe des scientifiques décide de modéliser l'évolution de la population de poissons par la suite définie pour tout entier n par :

$$b_n = 30 \times 1,3^n + 50$$

où b_n est le nombre de poissons après n mois.

1. Calculer les b_0, b_1 et b_2.
Retrouve-t-on des valeurs similaires à celles obtenues avec la suite (u_n) ?

Corrigé (1,5 point)

- Pour $n = 0$ on a :
$$b_0 = 30 \times 1,3^0 + 50 = 30 + 50 = 80$$
- Pour $n = 1$ on a :
$$b_1 = 30 \times 1,3^1 + 50 = 39 + 50 = 89$$
- Pour $n = 2$ on a :
$$b_2 = 30 \times 1,3^2 + 50 = 100,7$$

2. Compléter la fonction python suivante $liste\_termes\_b$, de paramètre n, qui renvoie une liste contenant les n premiers termes de la suite (b_n). On admet donc que $n \geqslant 1$ et que cette renvoie une liste vide si on l'appelle avec $n = 0$:

```
# Corrigé (1.5 point)
def liste_termes_b(n):
    L = []
    for i in range (n):
            b = 30*1.3**i + 50
        L.append(b)
    return L
```

3. Démontrer que la suite (b_n) ainsi définie est croissante.

Corrigé (2 points)

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= 30 \times 1,3^{n+1} + 50 - (30 \times 1,3^n + 50) \\ &= 30 \times 1,3^n \times 1,3^1 + 50 - 30 \times 1,3^n - 50 \\ &= 30 \times 1,3^n \times 1,3^1 - 30 \times 1,3^n \\ &= 30 \times 1,3^n \times (1,3 - 1) \\ &= 30 \times 1,3^n \times 0,3 > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (b_n) est croissante.

4. Quelle inéquation doit-on résoudre pour répondre au problème des scientifiques ?
Résoudre cette inéquation à la calculatrice et retrouver le résultat de la partie 1.
(On donnera encore 2 valeurs, l'une avant 500 et l'autre après 500).

Corrigé (1.5 point)

Il faut résoudre l'inéquation :

$$b_n > 500$$

On a :

$$\begin{cases} b_{10} \approx 463,6 < 500 \\ b_{11} \approx 587,6 > 500 \end{cases}$$

Donc on retrouve bien la valeur $n = 11$.

5. Écrire une fonction de seuil nommée $seuil2()$ sous python permettant de résoudre cette inéquation. Votre fonction devra renvoyer n, le premier indice du mois pour lequel la population dépasse le seuil de 500.

Corrigé (2 points)

On obtient :

```
def seuil2():
        b = 80
        n = 0
        while b <= 500 :
                n = n + 1
                b = 30*1.3**n + 50
        return n
 # ou
def seuil2():
        n = 0
        while 30* 1.3**n <= 500 :
                n = n + 1
        return n

```

↩ **Fin du devoir** ↪

Question Bonus

On veut démontrer que les suite (u_n) et (b_n) du dernier exercice sont en fait les mêmes.
Pour cela, montrer que la suite (b_n) vérifie la relation de récurrence de la suite (u_n) et que le premier terme des deux suites est le même.

Corrigé (2.5fd points)

Il faut montrer que la suite (b_n) vérifie la relation de récurrence de la suite (u_n) et que les premiers termes sont identiques.

$$\begin{cases} u_0 = 80 \\ u_{n+1} = 1,3u_n - 15 \end{cases}$$

La suite (b_n) est définie pour tout entier n par :

$$b_n = 30 \times 1,3^n + 50$$

Pour tout entier n on a :

- D'une part :

$$b_{n+1} = \underline{30 \times 1,3^{n+1} + 50}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} 1,3b_n - 15 &= 1,3 \times (30 \times 1,3^n + 50) - 15 \\ &= 30 \times 1,3^{n+1} + 1,3 \times 50 - 15 \\ &= 30 \times 1,3^{n+1} + 65 - 15 \\ &= \underline{30 \times 1,3^{n+1} + 50} \end{aligned}$$

- Conclusion : on vient donc de montrer que la suite (b_n) vérifiait la relation de récurrence de la la suite (u_n).

  $$b_{n+1} = 1,3b_n - 15$$

  Or les deux suite on le même premier terme :

  $$u_0 = b_0 = 80$$

  Donc elles sont bien identiques.