



Math93.com

Devoir Surveillé n°3A (Correction)

1re Spé Maths
Suites, Probabilités et V.A.
Durée 100 min - Coeff. 2
Noté sur 36 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Probabilités : des tests sanguins

6 points

Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} près.

Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif. Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.

On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'évènement « l'individu est allergique » ;
- T l'évènement « l'individu présente un test positif ».

On notera \bar{A} et \bar{T} les évènements contraires de A et T .

On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : $x = p(A)$.

1. Compléter l'arbre ci-contre (sur cette feuille) décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

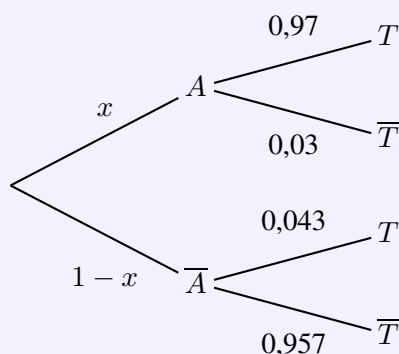


Corrigé (1 point)

D'après l'énoncé :

- $p_A(T) = 0,97$;
- $p_{\bar{A}}(\bar{T}) = 0,957$;
- $p(T) = 0,2$.

D'où l'arbre pondéré :



2.

2. a. Démontrer l'égalité :

$$p(T) = 0,927x + 0,043$$

**Corrigé (2 points)**

Les événements A et \bar{A} forment une partition de l'univers donc d'après la loi des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(T) &= p(A \cap T) + p(\bar{A} \cap T) \\ &= p(A) \times p_A(T) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(T) \\ &= x \times 0,97 + (1 - x) \times 0,043 \\ &= 0,97x + 0,043 - 0,043x \end{aligned}$$

$$p(T) = 0,927x + 0,043$$

2. b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.

**Corrigé (1,5 point)**

Comme

$$p(T) = 0,2 = 0,927x + 0,043 \iff 0,157 = 0,927x \iff \frac{0,157}{0,927} = x$$

Or

$$\frac{0,157}{0,927} \approx 0,1694$$

soit 0,169 au millième près.

$$x = p(A) \approx 0,169$$

3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :

« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».

**Corrigé (1,5 point)**

« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».

L'affirmation se traduit par : $p_T(A) > 0,8$.

Or

$$p_T(A) = \frac{p(T \cap A)}{p(T)} = \frac{p(A \cap T)}{p(T)} = \frac{p(A) \times p_A(T)}{p(T)} \approx \frac{0,169 \times 0,97}{0,2}$$

soit

$$p_T(A) \approx \frac{0,16393}{0,2} \approx 0,81965$$

soit environ 81,97 % : l'affirmation est vraie.

Exercice 2. Probabilités, suites et variable aléatoire**23 points**

Leyla passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que :

- si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas, soit avec une probabilité 0,7 ;
- si elle vient de perdre une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est 0,2 ;
- elle a autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Leyla pour répondre aux questions.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit les événements suivants :

- G_n : "Leyla gagne la n -ième partie de la journée" ;
- \overline{G}_n : "Leyla perd la n -ième partie de la journée".

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $g_n = P(G_n)$. On a donc $g_1 = P(G_1) = 0,5$.

1. Modélisation et deux premières parties

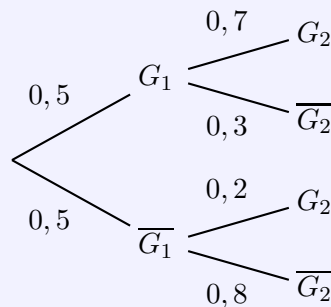
- 1. a.** Représenter la situation pour les deux premières parties à l'aide d'un arbre pondéré faisant intervenir G_1 et G_2 .

**Corrigé**

On a :

- $P(G_1) = 0,5$ et donc $P(\overline{G}_1) = P(\overline{G}_1) = 1 - 0,5 = 0,5$;
- $P_{G_1}(G_2) = 0,7$ et donc $P_{G_1}(\overline{G}_2) = P_{G_1}(\overline{G}_2) = 1 - 0,7 = 0,3$;
- $P_{\overline{G}_1}(G_2) = 0,2$ et donc $P_{\overline{G}_1}(\overline{G}_2) = 1 - 0,2 = 0,8$.

On peut représenter la situation par l'arbre pondéré suivant (probabilités conditionnelles sur les branches) :



Les branches portent donc $P(G_1) = 0,5$, $P_{G_1}(G_2) = 0,7$ et $P_{\overline{G}_1}(G_2) = 0,2$.

- 1. b.** Montrer que la probabilité que Leyla gagne la première et la deuxième partie est égale à 0,35.

**Corrigé**

La probabilité cherchée est $P(G_1 \cap G_2)$. D'après la règle du produit le long de la branche correspondante :

$$P(G_1 \cap G_2) = P(G_1) \times P_{G_1}(G_2) = 0,5 \times 0,7 = 0,35.$$

Ainsi :

$$\boxed{P(G_1 \cap G_2) = 0,35}$$

- 1. c.** Montrer que $P(G_2) = 0,45$.



Corrigé

Les événements G_1 et $\overline{G_1}$ forment une partition de l'univers. On applique la formule des probabilités totales à l'évènement G_2 :

$$\begin{aligned} P(G_2) &= P(G_2 \cap G_1) + P(G_2 \cap \overline{G_1}) \\ &= P(G_1) P_{G_1}(G_2) + P(\overline{G_1}) P_{\overline{G_1}}(G_2) \\ &= 0,5 \times 0,7 + 0,5 \times 0,2 \\ &= 0,35 + 0,10 \\ &= 0,45. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$P(G_2) = 0,45$$

1. d. Sachant que Leyla a gagné la deuxième partie, calculer la probabilité qu'elle ait perdu la première. Arrondir au millième.



Corrigé

La probabilité cherchée est $P_{G_2}(\overline{G_1}) = P_{G_2}(\overline{G_1})$. Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} P_{G_2}(\overline{G_1}) &= \frac{P(\overline{G_1} \cap G_2)}{P(G_2)} \\ &= \frac{P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2)}{P(G_2)} \\ &= \frac{0,5 \times 0,2}{0,45} = \frac{0,10}{0,45} \approx 0,2222\dots \end{aligned}$$

Au millième près, on obtient :

$$P_{G_2}(\overline{G_1}) \approx 0,222$$

1. e. Montrer que la probabilité que Leyla gagne exactement une des deux premières parties est égale à 0,25.



Corrigé

La probabilité que Leyla gagne exactement une seule des deux parties correspond aux cas :

$$G_1 \cap \overline{G_2} \quad \text{ou} \quad \overline{G_1} \cap G_2.$$

On a donc :

$$P(\text{exactement une victoire}) = P(G_1 \cap \overline{G_2}) + P(\overline{G_1} \cap G_2).$$

On calcule ces deux probabilités à l'aide de l'arbre :

$$\begin{aligned} P(G_1 \cap \overline{G_2}) &= P(G_1) \times P_{G_1}(\overline{G_2}) = 0,5 \times 0,3 = 0,15, \\ P(\overline{G_1} \cap G_2) &= P(\overline{G_1}) \times P_{\overline{G_1}}(G_2) = 0,5 \times 0,2 = 0,10. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$P(\text{exactement une victoire}) = 0,15 + 0,10 = 0,25.$$

Ainsi :

$$P(\text{Leyla gagne exactement une des deux premières parties}) = 0,25$$

2. Indépendance

Les évènements G_1 et G_2 sont-ils indépendants ?



Corrigé

On a déjà calculé :

$$P(G_1 \cap G_2) = 0,35 \quad \text{et} \quad P(G_1) = 0,5, \quad P(G_2) = 0,45.$$

Le produit des probabilités vaut :

$$P(G_1) \times P(G_2) = 0,5 \times 0,45 = 0,225.$$

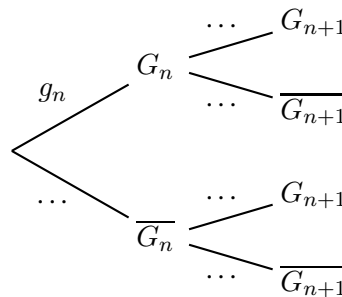
On constate qu'il n'y a pas égalité :

$$P(G_1 \cap G_2) \neq P(G_1) \times P(G_2) \implies 0,35 \neq 0,225.$$

Les évènements G_1 et G_2 ne sont donc **pas indépendants**.

3. Généralisation Pour tout $n \geq 1$, on note $g_n = P(G_n)$.

3. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant (aucune justification n'est attendue) :

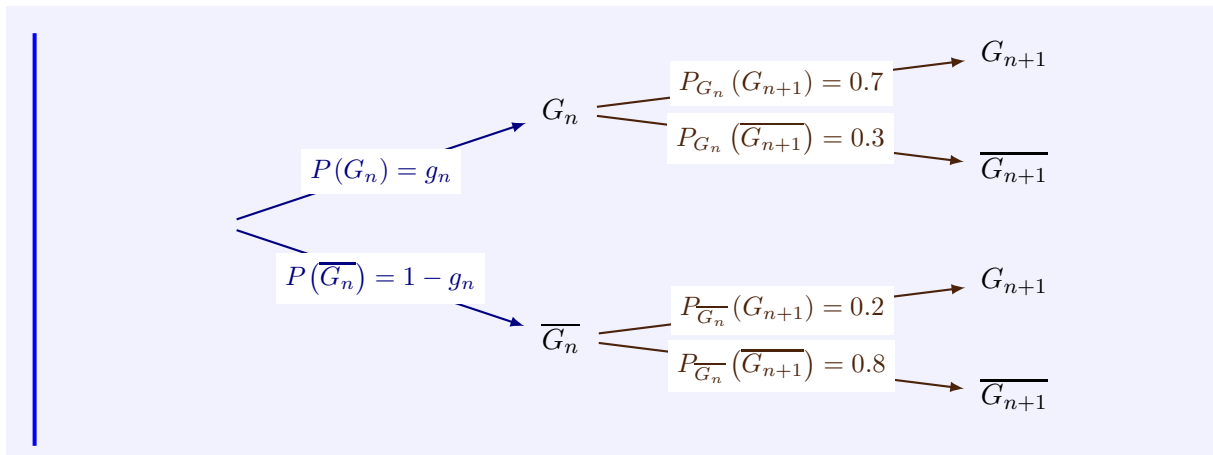


Corrigé

On sait que :

- $P(G_n) = g_n$ et donc $P(\overline{G_n}) = 1 - g_n$;
- si Leyla vient de gagner (G_n), alors $P_{G_n}(G_{n+1}) = 0,7$ et donc $P_{G_n}(\overline{G_{n+1}}) = 0,3$;
- si Leyla vient de perdre ($\overline{G_n}$), alors $P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = 0,2$ et donc $P_{\overline{G_n}}(\overline{G_{n+1}}) = 0,8$.

On obtient l'arbre pondéré suivant :



3. b. Justifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$g_{n+1} = 0,5 g_n + 0,2.$$



Corrigé

Les évènements G_n et $\overline{G_n}$ forment une **partition de l'univers**. On applique la **formule des probabilités totales** à l'évènement G_{n+1} :

$$\begin{aligned} P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ &= P(G_n) P_{G_n}(G_{n+1}) + P(\overline{G_n}) P_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1 - g_n) \times 0,2 \\ &= 0,7 g_n + 0,2 - 0,2 g_n \\ &= (0,7 - 0,2) g_n + 0,2 \\ &= 0,5 g_n + 0,2. \end{aligned}$$

En posant $g_{n+1} = P(G_{n+1})$, on obtient bien, pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{g_{n+1} = 0,5 g_n + 0,2}.$$

3. c. À partir de $g_1 = 0,5$, calculer successivement g_2 , g_3 et g_4 (en utilisant la relation précédente).



Corrigé

On applique la relation de récurrence $g_{n+1} = 0,5 g_n + 0,2$:

$$\begin{aligned} g_1 &= 0,5, \\ g_2 &= 0,5 g_1 + 0,2 = 0,5 \times 0,5 + 0,2 = 0,25 + 0,2 = 0,45, \\ g_3 &= 0,5 g_2 + 0,2 = 0,5 \times 0,45 + 0,2 = 0,225 + 0,2 = 0,425, \\ g_4 &= 0,5 g_3 + 0,2 = 0,5 \times 0,425 + 0,2 = 0,2125 + 0,2 = 0,4125. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{g_2 = 0,45 \quad ; \quad g_3 = 0,425 \quad ; \quad g_4 = 0,4125}$$

4. Étude de la suite (g_n) .4. a. Déterminer la valeur d'équilibre g^* telle que

$$g^* = 0,5 g^* + 0,2.$$

**Corrigé**On cherche un réel g^* tel que la relation de récurrence soit vérifiée à l'équilibre :

$$g^* = 0,5 g^* + 0,2.$$

On isole g^* :

$$\begin{aligned} g^* - 0,5 g^* &= 0,2 \\ (1 - 0,5) g^* &= 0,2 \\ 0,5 g^* &= 0,2 \\ g^* &= \frac{0,2}{0,5} = \frac{2}{5} = 0,4. \end{aligned}$$

La valeur d'équilibre est donc :

$$g^* = \frac{2}{5} = 0,4.$$

4. b. Au vu des valeurs numériques, conjecturer le comportement de (g_n) lorsque n augmente.**Corrigé**

On a calculé :

$$g_1 = 0,5, \quad g_2 = 0,45, \quad g_3 = 0,425, \quad g_4 = 0,4125.$$

On observe que les termes de la suite diminuent et semblent se rapprocher de la valeur $g^* = 0,4$.

$$(g_n) \text{ semble décroissante et converger vers } g^* = 0,4.$$

4. c. On rappelle que $g_{n+1} = 0,5 g_n + 0,2$ et on admet le **minorant** suivant :

$$\forall n \geq 1, \quad g_n \geq g^* \quad \text{avec} \quad g^* = \frac{2}{5}.$$

En utilisant ce minorant, étudier le signe de $g_{n+1} - g_n$ puis en déduire les variations de la suite (g_n) .**Corrigé**Pour tout entier $n \geq 1$, on calcule la différence :

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= (0,5 g_n + 0,2) - g_n \\ &= (0,5 - 1) g_n + 0,2 \\ &= -0,5 g_n + 0,2. \end{aligned}$$

Par hypothèse admise, pour tout $n \geq 1$, on a $g_n \geq g^* = \frac{2}{5}$. On en déduit :

$$-0,5 g_n \leq -0,5 \times \frac{2}{5} = -\frac{1}{5} = -0,2.$$

Donc :

$$-0,5 g_n + 0,2 \leq -0,2 + 0,2 = 0.$$

Ainsi, pour tout entier $n \geq 1$:

$$g_{n+1} - g_n \leq 0.$$

On en déduit que la suite (g_n) est **décroissante**.

De plus, elle est **minorée** par $g^* = \frac{2}{5}$.

5. Expression explicite et étude des variations (bis).

On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, la suite (g_n) admet l'expression explicite suivante :

$$g_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. a. À l'aide de cette expression explicite, calculer g_1 , g_2 et g_3 .



Corrigé

Pour $n = 1$:

$$g_1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Pour $n = 2$:

$$g_2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{20} = \frac{8}{20} + \frac{1}{20} = \frac{9}{20} = 0,45.$$

Pour $n = 3$:

$$g_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{40} = \frac{16}{40} + \frac{1}{40} = \frac{17}{40} = 0,425.$$

Ainsi :

$$g_1 = 0,5, \quad g_2 = 0,45, \quad g_3 = 0,425$$

5. b. Avec cette expression explicite, étudier les variations de la suite (g_n) .



Corrigé

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$g_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad g_{n+1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On calcule la différence :

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= \left[\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] - \left[\frac{2}{5} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{10} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right] \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Or $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > 0$ et $-\frac{1}{2} < 0$, donc le produit est strictement négatif :

$$g_{n+1} - g_n < 0.$$

La suite (g_n) est donc **strictement décroissante**.

6. Extension : variable aléatoire associée au nombre de victoires

On s'intéresse au résultat des **deux premières parties** jouées par Leyla. On note X la variable aléatoire qui, à chaque journée, associe :

X = nombre de parties gagnées par Leyla parmi les deux premières.

D'après les résultats obtenus précédemment :

$$P(G_1 \cap G_2) = 0,35 \quad \text{et} \quad P(\text{une seule victoire}) = 0,25.$$

6. a. Déterminer les valeurs possibles de X puis donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

On pourra utiliser les résultats des question 1.b. et 1.e.



Corrigé

Leyla joue deux parties. Elle peut :

- perdre les deux parties : alors elle ne gagne aucune partie, donc $X = 0$;
- gagner exactement une des deux parties : alors $X = 1$;
- gagner les deux parties : alors $X = 2$.

Les valeurs possibles de X sont donc :

$$X \in \{0; 1; 2\}.$$

On utilise maintenant les probabilités déjà calculées dans l'exercice :

- $P(G_1 \cap G_2) = 0,35$ (Leyla gagne les deux parties);
- $P(\text{Leyla gagne exactement une des deux premières parties}) = 0,25$;
- on en déduit la probabilité de perdre les deux parties :

$$P(\overline{G_1} \cap \overline{G_2}) = 1 - P(G_1 \cap G_2) - P(\text{exactement une victoire}) = 1 - 0,35 - 0,25 = 0,40.$$

On peut alors exprimer la loi de X :

$$\begin{cases} X = 0 & \text{si } \overline{G_1} \cap \overline{G_2}, \\ X = 1 & \text{si Leyla gagne exactement une des deux parties,} \\ X = 2 & \text{si } G_1 \cap G_2. \end{cases}$$

D'où :

$$P(X = 0) = 0,40, \quad P(X = 1) = 0,25, \quad P(X = 2) = 0,35.$$

La loi de probabilité de X est :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	0,40	0,25	0,35

On vérifie que la somme des probabilités vaut bien 1 :

$$0,40 + 0,25 + 0,35 = 1.$$

$$P(X = 0) = 0,40; \quad P(X = 1) = 0,25; \quad P(X = 2) = 0,35.$$

6. b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.



Corrigé

Par définition, l'espérance de X est donnée par :

$$E(X) = \sum x_i P(X = x_i) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2).$$

En remplaçant par les valeurs trouvées :

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0,40 + 1 \times 0,25 + 2 \times 0,35 \\ &= 0 + 0,25 + 0,70 \\ &= 0,95. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$E(X) = 0,95.$$

Interprétation : si l'on considère un grand nombre de journées où Leyla joue deux parties dans les mêmes conditions, le nombre moyen de victoires sur les deux premières parties sera d'environ 0,95 par journée.

Exercice 3. Variables aléatoires

7 points

Après avoir misé 10 €, un joueur tire une boule au hasard dans l'urne ci-contre.

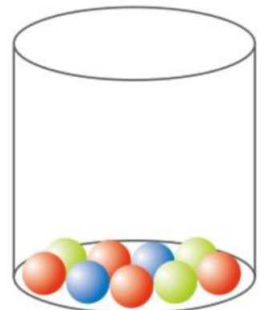
Cette urne contient :

- 4 boules de couleur ROUGE ;
- 3 boules de couleur VERTE ;
- 2 boules de couleur BLEUE.

Par ailleurs :

- S'il tire une boule bleue, il reçoit 18 € ;
- s'il tire une boule verte, on lui rembourse sa mise ;
- et s'il tire une boule rouge il ne gagne rien donc il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire qui donne le gain du joueur, éventuellement négatif.



1. Déterminer la loi de probabilité de X .



Corrigé (2 pts)

La mise est de 10 euros donc la v.a.

X prend les valeurs :

- $X = 18 - 10 = 8$ € si on tire une une des 2 boules bleues sur les 9 boules, soit avec une probabilité de $\frac{2}{9}$ (il y a équiprobabilité des tirages) ;
- $X = 0$ € si on tire une une des 3 boules vertes sur les 9 boules, soit avec une probabilité de $\frac{3}{9}$;
- $X = -10$ € si on tire une une des 4 boules rouges sur les 9 boules, soit avec une probabilité de $\frac{4}{9}$;

La loi de probabilité de X est donc :

Issues	boule Rouge (4 sur 9)	boule Verte (3 sur 9)	boule Bleue (2 sur 9)
x_i	-10	0	8
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

2. Calculer l'espérance $E(X)$.



Corrigé (1.5 pt)

x_i	-10	0	8
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

Espérance

$$E(x) = -10 \times \frac{4}{9} + 0 \times \frac{3}{9} + 8 \times \frac{2}{9} = -\frac{8}{3}$$

Interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.



Corrigé (0.5 pt)

L'espérance de $-\frac{8}{3} \approx -2,67$ correspond au gain moyen (qui est ici une perte).

3. Quel devrait être le montant de la mise initiale pour que le jeu soit équitable ?



Corrigé (3 pts)

Pour que le jeu soit équitable, l'espérance doit être égale à zéro. Soit m la mise initiale, alors la variable aléatoire X prend les valeurs suivantes :

- $X = 18 - m$ si on tire une boule bleue, avec une probabilité de $\frac{2}{9}$;
- $X = 0$ si on tire une boule verte, avec une probabilité de $\frac{3}{9}$;
- $X = -m$ si on tire une boule rouge, avec une probabilité de $\frac{4}{9}$;

Issues	boule Rouge (4 sur 9)	boule Verte (3 sur 9)	boule Bleue (2 sur 9)
x_i	$-m$	0	$18 - m$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

L'espérance est donc :

$$E(X) = (18 - m) \times \frac{2}{9} + 0 \times \frac{3}{9} + (-m) \times \frac{4}{9}.$$

En imposant $E(X) = 0$, on résout l'équation :

$$(18 - m) \times \frac{2}{9} - m \times \frac{4}{9} = 0.$$

Multipliant chaque terme par 9 pour simplifier, on obtient :

$$2(18 - m) - 4m = 0,$$

ce qui donne :

$$36 - 2m - 4m = 0,$$

soit :

$$36 = 6m,$$

d'où :

$$m = 6.$$

Ainsi, la mise initiale pour que le jeu soit équitable est de 6 €.

↔ **Fin du devoir** ↔



Question Bonus

A partir de l'exercice 2, écrire une fonction de seuil Python qui permet de trouver le rang du premier terme g_n de la suite tel que : $|g_n - g^*| < 10^{-3}$. Donner ce résultat avec la calculatrice.