Devoir Surveillé n°3A

Math93.com

1re Spé Maths

Suites, Probabilités et V.A.
Durée 100 min - Coeff. 2
Noté sur 36 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Probabilités : des tests sanguins — 6 points

Les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*
Pour aider à la détection de certaines allergies, on peut procéder à un test sanguin dont le résultat est soit positif, soit négatif. Dans une population, ce test donne les résultats suivants :

- Si un individu est allergique, le test est positif dans 97 % des cas ;
- Si un individu n'est pas allergique, le test est négatif dans 95,7 % des cas.

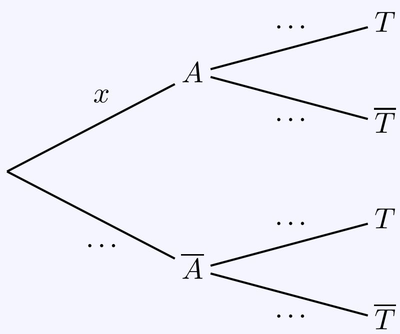
Par ailleurs, 20 % des individus de la population concernée présentent un test positif.
On choisit au hasard un individu dans la population, et on note :

- A l'évènement « l'individu est allergique » ;
- T l'évènement « l'individu présente un test positif ».

On notera $\overline{A}$ et $\overline{T}$ les évènements contraires de A et T.
On appelle par ailleurs x la probabilité de l'évènement A : $x = p(A)$.

1. Compléter l'arbre ci-contre (sur cette feuille) décrivant la situation, en indiquant sur chaque branche la probabilité correspondante.

A compléter sur cette feuille



2.

2. a. Démontrer l'égalité :

$$p(T) = 0,927x + 0,043$$

2. b. En déduire la probabilité que l'individu choisi soit allergique.

3. Justifier par un calcul l'affirmation suivante :
« Si le test d'un individu choisi au hasard est positif, il y a plus de 80 % de chances que cet individu soit allergique ».

Exercice 2. Probabilités, suites et variable aléatoire — 23 points

Leyla passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'interesse aux chances de victoire de ses prochaines parties.
Elle estime que :

- si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans $70\,\%$ des cas, soit avec une probabilité $0{,}7$;
- si elle vient de perdre une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est $0{,}2$;
- elle a autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.

On s'appuiera sur les affirmations de Leyla pour répondre aux questions.
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on définit les évènements suivants :

- G_n : "Leyla gagne la n-ième partie de la journée" ;
- $\overline{G_n}$: "Leyla perd la n-ième partie de la journée".

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note $g_n = P(G_n)$. On a donc $g_1 = P(G_1) = 0{,}5$.

1. Modélisation et deux premières parties

1. a. Représenter la situation pour les deux premières parties à l'aide d'un arbre pondéré faisant intervenir G_1 et G_2.

1. b. Montrer que la probabilité que Leyla gagne la première et la deuxième partie est égale à $0{,}35$.

1. c. Montrer que $P(G_2) = 0{,}45$.

1. d. Sachant que Leyla a gagné la deuxième partie, calculer la probabilité qu'elle ait perdu la première. Arrondir au millième.

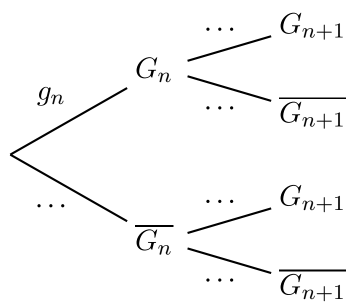
1. e. Montrer que la probabilité que Leyla gagne exactement une des deux premières parties est égale à $0{,}25$.

2. Indépendance

Les évènements G_1 et G_2 sont-ils indépendants ?

3. Généralisation Pour tout $n \geq 1$, on note $g_n = P(G_n)$.

3. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant (aucune justification n'est attendue) :



3. b. Justifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$g_{n+1} = 0{,}5\,g_n + 0{,}2.$$

3. c. À partir de $g_1 = 0{,}5$, calculer successivement g_2, g_3 et g_4 (en utilisant la relation précédente).

4. Étude de la suite (g_n).

4. a. Déterminer la valeur d'équilibre g^* telle que

$$g^* = 0{,}5\,g^* + 0{,}2.$$

4. b. Au vu des valeurs numériques, conjecturer le comportement de (g_n) lorsque n augmente.

4. c. On rappelle que $g_{n+1} = 0{,}5\, g_n + 0{,}2$ et <u>on admet</u> le **minorant** suivant :

$$\forall n \geq 1, \qquad g_n \ \geq \ g^* \quad \text{avec} \quad g^* = \frac{2}{5}.$$

En utilisant ce minorant, étudier le signe de $g_{n+1} - g_n$ puis en déduire les variations de la suite (g_n).

5. Expression explicite et étude des variations (bis).

On admet que, pour tout entier $n \geq 1$, la suite (g_n) admet l'expression explicite suivante :

$$g_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

5. a. À l'aide de cette expression explicite, calculer g_1, g_2 et g_3.

5. b. Avec cette expression explicite, étudier les variations de la suite (g_n).

6. Extension : variable aléatoire associée au nombre de victoires

On s'intéresse au résultat des **deux premières parties** jouées par Leyla. On note X la variable aléatoire qui, à chaque journée, associe :

$$X = \text{nombre de parties gagnées par Leyla parmi les deux premières.}$$

D'après les résultats obtenus précédemment :

$$P(G_1 \cap G_2) = 0{,}35 \qquad \text{et} \qquad P(\text{une seule victoire}) = 0{,}25.$$

6. a. Déterminer les valeurs possibles de X puis donner la loi de probabilité de X sous forme de tableau.

On pourra utiliser les résultats des question 1.b. et 1.e.

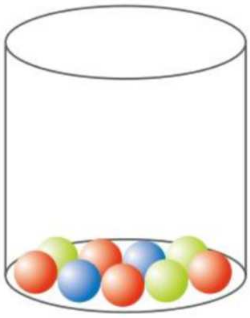
6. b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3. Variables aléatoires — 7 points

Après avoir misé 10 € , un joueur tire une boule au hasard dans l'urne ci-contre.

Cette urne contient :

- 4 boules de couleur ROUGE ;
- 3 boules de couleur VERTE ;
- 2 boules de couleur BLEUE.



Par ailleurs :

- S'il tire une boule bleue, il reçoit 18 € ;
- s'il tire une boule verte, on lui rembourse sa mise ;
- et s'il tire une boule rouge il ne gagne rien donc il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire qui donne le gain du joueur, éventuellement négatif.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance $E(X)$. Interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.
3. Quel devrait être le montant de la mise initiale pour que le jeu soit équitable ?

Fin du devoir

Question Bonus

A partir de l'exercice 2, écrire une fonction de seuil Python qui permet de trouver le rang du premier terme g_n de la suite tel que : $|g_n - g^*| < 10^{-3}$. Donner ce résultat avec la calculatrice.