

# Devoir Surveillé n°5A (Correction)



Math93.com

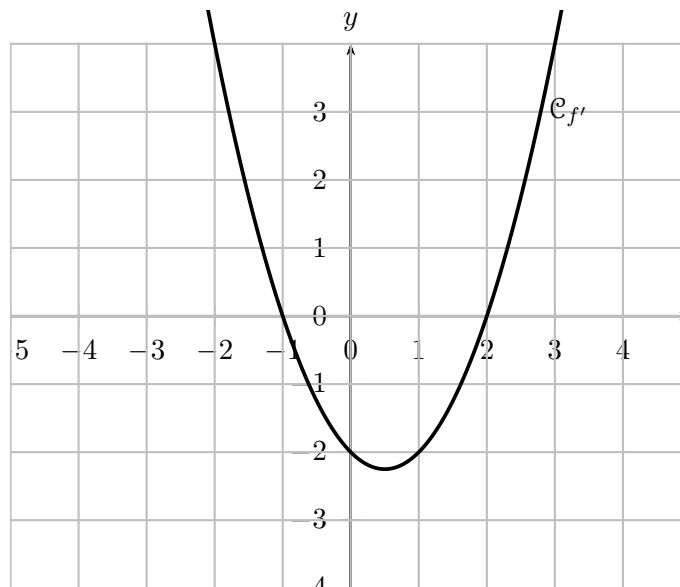
## 1re Spé Maths Étude de fonctions Durée 40 min - Coeff. 1 Noté sur 20 points

*La calculatrice en mode examen est autorisée.*

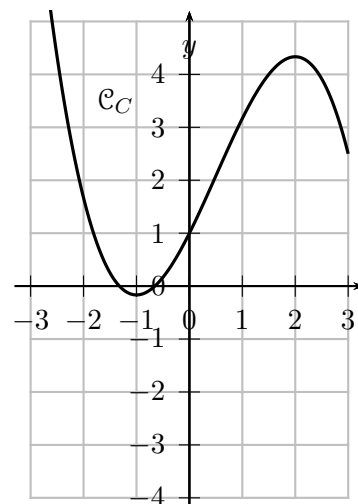
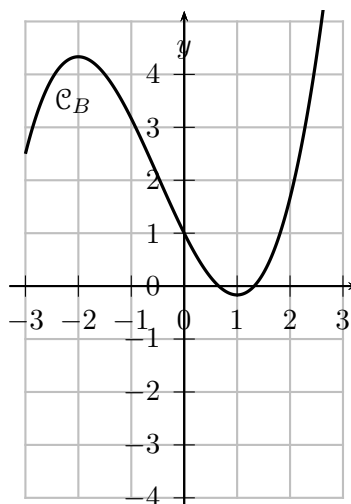
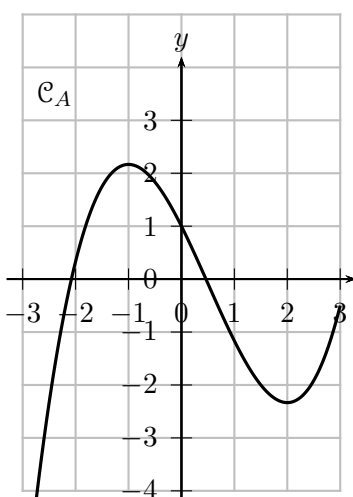
### Exercice 1. Lectures graphiques

3 points

On considère une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . La courbe ci-dessous représente la dérivée  $f'$ .



On propose ci-dessous trois courbes candidates  $\mathcal{C}_A$ ,  $\mathcal{C}_B$ ,  $\mathcal{C}_C$  susceptibles de représenter la courbe  $\mathcal{C}_f$ .



Parmi  $\mathcal{C}_A$ ,  $\mathcal{C}_B$ ,  $\mathcal{C}_C$ , déterminer laquelle peut représenter  $\mathcal{C}_f$ . Justifier.



### Corrigé

1. On lit sur la courbe  $\mathcal{C}_{f'}$  que  $f'(x) = 0$  pour  $x = -1$  et  $x = 2$ . De plus,  $\mathcal{C}_{f'}$  est au-dessus de l'axe des abscisses pour  $x < -1$  et pour  $x > 2$ , et en dessous pour  $-1 < x < 2$ . On en déduit le signe de  $f'$  et donc les variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de $f$					

2. On en déduit :

- en  $x = -1$ ,  $f$  admet un maximum local
- en  $x = 2$ ,  $f$  admet un minimum local

Parmi les trois courbes proposées :

- $\mathcal{C}_B$  présente ses extremums vers  $x = -2$  et  $x = 1$  : ce n'est pas cohérent avec les zéros de  $f'$ .
- $\mathcal{C}_C$  a les mêmes abscisses critiques mais le sens des variations est inversé (on observe d'abord une décroissance puis une croissance).
- $\mathcal{C}_A$  présente bien un maximum en  $x = -1$  puis un minimum en  $x = 2$ .

Donc la bonne réponse est :

$$\mathcal{C}_f = \mathcal{C}_A$$

## Exercice 2. Avec une fonction auxiliaire

17 points

## Partie A

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = x^3 + 3x - 5.$$

1. Montrer que la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  puis dresser son tableau de variations.

**Corrigé (3 points)**

$g$  est un polynôme, donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$g'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1).$$

Pour tout réel  $x$ , on a  $x^2 + 1 > 0$ , donc :

$$g'(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Ainsi,  $g$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Variations de $g$	$-\infty$	$+\infty$

↗

2. Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 3]$ .

**Corrigé (2 points)**

On calcule :

$$g(0) = -5 < 0 \quad \text{et} \quad g(3) = 27 + 9 - 5 = 31 > 0.$$

La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , donc elle s'annule une seule fois. Comme  $g(0) < 0$  et  $g(3) > 0$ , l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 3]$ .

3. Donner un encadrement au millième de  $\alpha$ .

**Corrigé (2 points)**

À la calculatrice :

$$g(1,154) \approx -0,0012 < 0 \quad \text{et} \quad g(1,155) \approx 0,0058 > 0.$$

Donc :

$$1,154 < \alpha < 1,155.$$

## Partie B

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 3]$  par :

$$f : \begin{cases} [0; 3] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2 + 1} + 3 \end{cases}.$$

4. Montrer que  $f$  est bien définie sur  $[0; 3]$ .



### Corrigé (1 point)

Pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 > 0$ , donc le dénominateur ne s'annule jamais. Ainsi,  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $[0; 3]$ .

5. Justifier que  $f$  est dérivable sur  $[0; 3]$  et montrer que :

$$f'(x) = \frac{2x g(x)}{(x^2 + 1)^2}.$$



### Corrigé (4 points)

La fonction  $f$  est quotient de deux polynômes donc définie et dérivable sur tout intervalle sur lequel  $v$  ne s'annule pas, donc sur  $\mathbb{R}$  et a fortiori sur  $[0; 3]$ .

La fonction  $f$  est de la forme  $u/v + k$  de dérivée  $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ .

On pose :

$u(x) = 2x^3 - 5x^2$	$u'(x) = 6x^2 - 10x$
$v(x) = x^2 + 1$	$v'(x) = 2x$

Pour tout réel  $x$  de  $[0; 3]$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(6x^2 - 10x)(x^2 + 1) - (2x^3 - 5x^2)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{6x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x - 4x^4 + 10x^3}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 + 6x^2 - 10x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{2x(x^3 + 3x - 5)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Soit

$$f'(x) = \frac{2x(x^3 + 3x - 5)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x g(x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

6. Étudier le signe de  $f'(x)$  puis dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 3]$ .

On calculera les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.



### Corrigé (4 points)

On a, pour tout  $x \in [0; 3]$  :

$$f'(x) = \frac{2x g(x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

1) Étude du signe de  $f'(x)$ .

- Sur  $[0; 3]$ , on a  $x^2 \geq 0$  donc  $(x^2 + 1)^2 > 0$ , donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $2xg(x)$ .
- Sur  $[0; 3]$ , on a  $2x \geq 0$ , avec  $2x = 0$  seulement pour  $x = 0$ .
- D'après la partie A, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 3]$  et

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
Variations de $g$	$-\infty$	0	$+\infty$

Donc

$$g(x) < 0 \text{ sur } [0; \alpha[, \quad g(\alpha) = 0, \quad g(x) > 0 \text{ sur } ]\alpha; 3].$$

**2) Tableau de variations.**

Comme  $f'(x) < 0$  sur  $]0; \alpha[$  puis  $f'(x) > 0$  sur  $]\alpha; 3]$ , la fonction  $f$  est décroissante sur  $[0; \alpha]$  puis croissante sur  $[\alpha; 3]$ .

$x$	0	$1.154 < \alpha < 1.155$	3	
Signe de $(x^2 + 1)$		+	+	
Signe de $2x$	0	+	+	
Signe de $g(x)$		-	0	+
Signe de $f'(x)$	0	-	0	+
Variations de $f$	3	$f(\alpha)$	$\frac{39}{10}$	

7. La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet-elle un point en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses? Si oui, préciser l'(les) abscisse(s).



**Corrigé (1 point)**

Une tangente parallèle à l'axe des abscisses correspond à :

$$f'(x) = 0 \iff 2xg(x) = 0$$

Or on a déjà vu lors de l'étude précédente que :

**Cas 1 :**  $2x = 0 \iff x = 0$ , et comme  $0 \in [0; 3]$ , cela donne une tangente horizontale en  $x = 0$ .

**Cas 2 :**  $g(x) = 0 \iff x = \alpha$ . D'après la partie A, l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[0; 3]$ , avec :

$$1,154 < \alpha < 1,155.$$

**Conclusion :**

La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet deux tangentes horizontales sur  $[0; 3]$ , aux abscisses :

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \alpha \quad \text{avec} \quad 1,154 < \alpha < 1,155.$$



### Question Bonus

Montrer que :

$$f(\alpha) = \frac{13 - 6\alpha - 2\alpha^2}{\alpha^2 + 1}$$



### Corrigé

En  $\alpha$  : on sait que  $g(\alpha) = 0$ , soit  $\alpha^3 + 3\alpha - 5 = 0$  donc :

$$\alpha^3 = 5 - 3\alpha.$$

On écrit :

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{2\alpha^3 - 5\alpha^2}{\alpha^2 + 1} + 3 \\ &= \frac{2(5 - 3\alpha) - 5\alpha^2}{\alpha^2 + 1} + 3 \\ &= \frac{10 - 6\alpha - 5\alpha^2}{\alpha^2 + 1} + 3 \\ &= \frac{10 - 6\alpha - 5\alpha^2 + 3\alpha^2 + 3}{\alpha^2 + 1} \\ f(\alpha) &= \frac{13 - 6\alpha - 2\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \end{aligned}$$

↩ **Fin du devoir** ↪