Devoir Surveillé n°5A

Math93.com

1re Spé Maths

Étude de fonctions

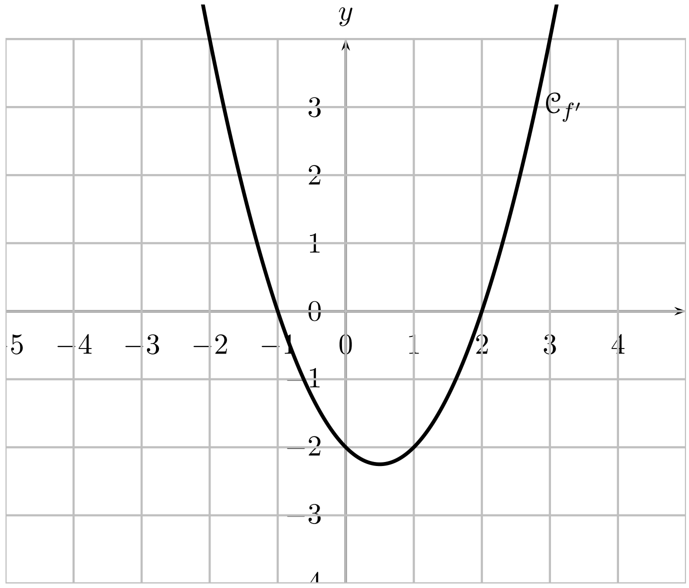
Durée 40 min - Coeff. 1

Noté sur 20 points

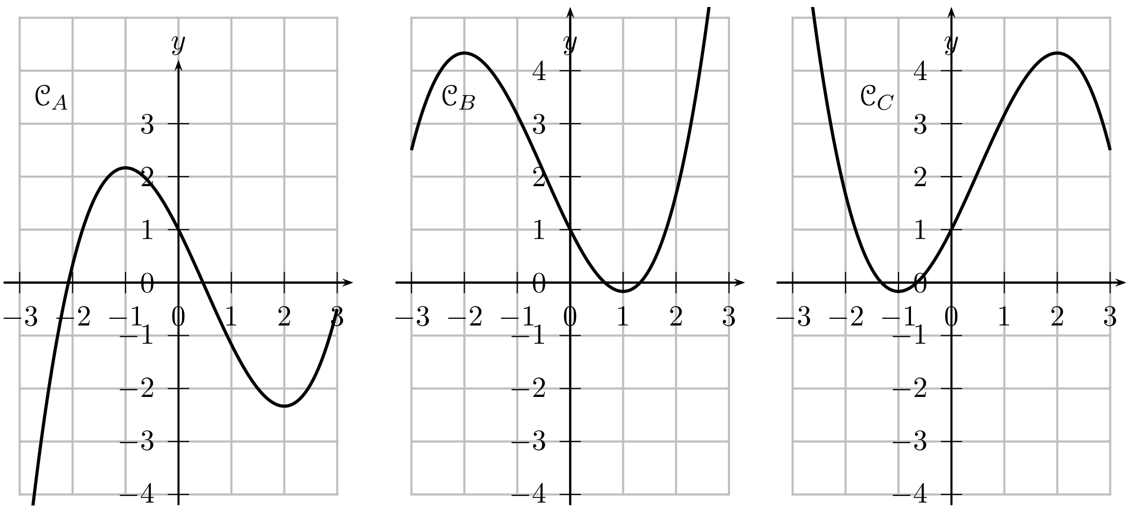
La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Lectures graphiques — 3 points

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe ci-dessous représente la dérivée f'.



On propose ci-dessous trois courbes candidates $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$ susceptibles de représenter la courbe $\mathcal{C}_f$.



Parmi $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$, $\mathcal{C}_C$, déterminer laquelle peut représenter $\mathcal{C}_f$. Justifier.

Exercice 2. Avec une fonction auxiliaire — 17 points

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x - 5.$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,3]$.

3. Donner un encadrement au millième de α.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,3]$ par :

$$f : \begin{cases} [0\,;\,3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2}{x^2+1} + 3 \end{cases}.$$

4. Montrer que f est bien définie sur $[0\,;\,3]$.

5. Justifier que f est dérivable sur $[0\,;\,3]$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{2x\,g(x)}{(x^2+1)^2}.$$

6. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\,3]$.
On calculera les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.

7. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle un point en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ? Si oui, préciser l'(les) abscisse(s).

Question Bonus

Montrer que :

$$f(\alpha) = \frac{13 - 6\alpha - 2\alpha^2}{\alpha^2+1}$$

Fin du devoir