Devoir Surveillé n°6A

Math93.com

1re Spé Maths

Suites et étude de fonctions

Durée 100 min - Coeff. 2

Noté sur 27.5 points

La calculatrice en mode examen est autorisée.

Exercice 1. Suite arithmétique et somme de termes — 2 points

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 3.

1. Déterminer le terme général de la suite (u_n).

2. Calculer :

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$$

Exercice 2. Une Suite arithmétique auxiliaire — 6.5 points

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 2}{2u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

A compléter sur cette feuille

```
def terme(n):
    u = ....
    for i in range(n):
        u = ....
    return u
```

Compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme(n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 1}.$$

3. a. Calculer v_0 et v_1.

3. b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 2.

3. c. En déduire que, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{1}{2n+1} - 1.$$

Exercice 3. Suite arithmético-géométrique 8 points

Une commune dispose de 380 voitures et propose un système de locations de ces voitures selon les modalités suivantes :

- chaque voiture est louée pour une durée d'un mois ;
- la location commence le 1er jour du mois et se termine le dernier jour du même mois ;
- le nombre de voitures louées est comptabilisé à la fin de chaque mois.

À la fin du mois de janvier 2019, 280 voitures ont été louées avec ce système de location.
Le responsable de ce système souhaite étudier l'évolution du nombre de locations de voitures.

Pour cela il modélise le nombre de voitures louées chaque mois par une suite (u_n) , où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de voitures louées le n-ième mois après le mois de janvier 2019.

Ainsi $u_0 = 280$.
On admet que cette modélisation conduit à l'égalité :

$$u_{n+1} = 0,9\, u_n + 42$$

1. Combien de voitures ont-elles été louées avec ce système de location au mois de février 2019 ?

2. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$V_n = u_n - 420$$

2. a. Montrer que la suite (V_n) est géométrique. On précisera le premier terme V_0 et la raison.

2. b. Pour tout entier naturel n, exprimer V_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -140 \times 0,9^n + 420$$

3. Étudier les variations de la suite (u_n).

4. La commune, qui possède initialement 380 véhicules, envisage d'acheter des voitures supplémentaires pour répondre à la demande. Le responsable de la commune souhaite prévoir à partir de quelle date le nombre de voitures sera insuffisant.

4. a. A l' aide de la calculatrice (valeur avant, valeur après) répondre au problème posé. (Donnez la date correspondante).

4. b. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie la solution obtenue à la question précédente.

A compléter sur cette feuille

```
def seuil():
    n = 0
    u = ....

    while ...................:

        n = ............

        u = ............

    return n
```

Exercice 4. Étude de fonction — 11 points

Soit la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 8x + 1}{x^2 + 1}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire g — 6 points

On pose pour tout réel $x \in [-10; 10]$:

$$g(x) = x^3 + 2x^2 - x - 4.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $[-10; 10]$ et dresser le tableau de variations en précisant bien les valeurs aux bornes (donner juste les valeurs calculées à l'aide de la calculatrice).

> **Aide**
> $\Delta = 28$ donc les racines sont irrationnelles. Vous ferez figurer une approximations des images de x_1 et x_2 par g.

2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-10; 10]$.

3. Déterminer un encadrement de α à 10^{-2}.

4. Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction f — 5 points

1. Montrer que la dérivée de f est, pour tout réel x de sur $[-10; 10]$:

$$f'(x) = \frac{x^4 - 5x^2 - 2x + 8}{(x^2 + 1)^2},$$

2. Déterminer les réels a, b, c et d pour lesquels :

$$f'(x) = \frac{(x - 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)}{(x^2 + 1)^2}.$$

3. On admet que :

$$f'(x) = \frac{(x - 2) \times g(x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Étudier les variations de la fonction f.

Fin du devoir

> **Question Bonus**
> Soit une suite définie par $u_0 = k$ son premier terme et par la relation de récurrence :
>
> $$u_{n+1} = a \times u_n + b$$
>
> avec a réel différent de 0 et 1 et b non nul .
> Déterminer α pour que la suite (V_n) définie par $V_n = u_n + \alpha$ soit géométrique (de raison a).
> En déduire alors le terme général de la suite (u_n).