Devoir Surveillé n°7A

Math93.com

1re Spé Maths

Trigonométrie et fonction Exponentielle

Durée 100 min - Coeff. 2
Noté sur 20 points

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1. QCM - Automastismes — 6 points

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiples). Pour chacune des questions suivantes, une seule des réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

Question 1.

L'opposé de l'inverse du double de 3 est égal à :

a. $\dfrac{1}{6}$ **b.** $\dfrac{2}{3}$ **c.** $-\dfrac{2}{3}$ **d.** $-\dfrac{1}{6}$

Question 2.

On considère la relation $F = \dfrac{1}{a} - \dfrac{cd}{b}$.

Lorsque $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{2}{3}$, $c = 4$, $d = -\dfrac{1}{4}$, la valeur de F est égale à :

a. $\dfrac{7}{2}$ **b.** $\dfrac{1}{2}$ **c.** 2 **d.** $\dfrac{8}{3}$

Question 3.

Le prix d'un article est multiplié par 1,155.
Cela signifie que le prix de cet article a connu :

a. une augmentation de 1,155 % **b.** une augmentation de 15,5 %
c. une augmentation 1,55 % **d.** une augmentation 11,55 %

Question 4.

Le prix d'un article est noté P. Ce prix augmente de 10 % puis baisse de 10 %.
À l'issue de ces deux variations, le nouveau prix est noté P_1. On peut affirmer que :

a. $P_1 = P$ **b.** $P_1 > P$ **c.** $P_1 < P$ **d.** Cela dépend de P

Question 5.

On lance un dé à 6 faces.
La probabilité d'obtenir chacune des faces est donnée dans le tableau ci-dessous :

Face numéro 1	Face numéro 2	Face numéro 3	Face numéro 4	Face numéro 5	Face numéro 6
0,1	$\dfrac{1}{10}$	0,3	$\dfrac{1}{6}$	0,2	x

On peut affirmer que :

a. $x = \dfrac{2}{15}$ **b.** $x = \dfrac{2}{3}$ **c.** $x = 0,4$ **d.** $x = 0,1$

Question 6.

On considère $x,\ y, u$ des réels non nuls tels que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{u}$.
On peut affirmer que :

a. $u=\dfrac{xy}{x+y}$ **b.** $u=\dfrac{x+y}{xy}$ **c.** $u=xy$ **d.** $u=x+y$

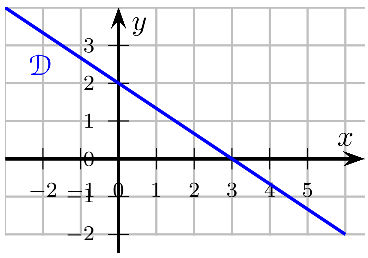
Question 7.

On note $(\mathcal{I})$ l'inéquation $x^2 \geqslant 2$.
L'inéquation $(\mathcal{I})$ est équivalente à :

a. $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$ **b.** $x \leqslant -\sqrt{2}$ ou $x \geqslant \sqrt{2}$
c. $x \geqslant \sqrt{2}$ **d.** $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Question 8

On a représenté ci-contre une droite $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé.
Une équation de la droite $\mathcal{D}$ est :



a. $y=-\dfrac{3}{2}x+2$ **b.** $y=\dfrac{2}{3}x+2$
c. $2x-3y-6=0$ **d.** $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}-1=0$

Question 9

On considère trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

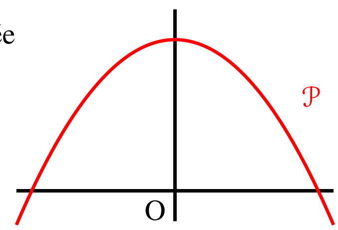
$f_1 : x \longmapsto x^2-(-x+1)^2$ $f_2 : x \longmapsto \dfrac{x}{2}-\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $f_3 : x \longmapsto \dfrac{5-\frac{2}{3}x}{0,7}$

Parmi ces trois fonctions, celles qui sont des fonctions affines sont :

a. aucune **b.** toutes
c. uniquement la fonction f_1 **d.** uniquement les fonction f_2 et f_3

Question 10

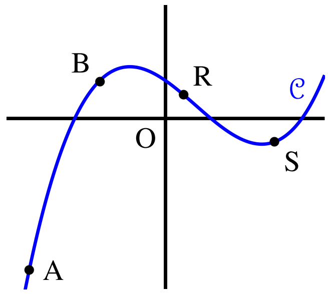
On a représenté ci-contre une parabole $\mathcal{P}$.
Une seule des quatre fonctions ci-dessous est susceptible d'être représentée par la parabole $\mathcal{P}$.
Laquelle ?



a. $x \longmapsto x^2-10$ **b.** $x \longmapsto -x^2-10$
c. $x \longmapsto -x^2+10$ **d.** $x \longmapsto -x^2+10x$

Question 11

On a représenté ci-contre la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f.
Les points A, B, R et S appartiennent à la courbe $\mathcal{C}$.
Leurs abscisses sont notées respectivement $x_A,\ x_B,\ x_R$ et x_S.
L'inéquation $x \times f(x) > 0$ est vérifiée par :



a. x_A et x_B **b.** x_A et x_R
c. x_A et x_S **d.** $x_A,\ x_B$ et x_S

Question 12

Voici une série de notes avec les coefficients associés.

Note	10	8	16
Coefficient	1	2	x

On note m la moyenne de cette série.
Que doit valoir x pour que $m = 15$?

a. impossible **b.** $x = 10^{-3}$ **c.** $x = 3$ **d.** $x = 19$

Exercice 2. Trigonométrie en calcul de $\cos 7\pi/12$ 3.5 points

On admettra la formule d'addition (pour tout réels α et β) :

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \cos\alpha\,\sin\beta}$$

1. Montrer à l'aide de la formule d'addition en écrivant $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ que

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

2. Donner (sans le calculer) le signe du cosinus de $\dfrac{7\pi}{12}$.

3. Déterminer une expression de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ en utilisant la relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

4. Montrer alors qu'en fait :

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$$

Exercice 3. Équations 3.5 points

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(X) = 2X^2 - X - 1.$$

1. a. Résoudre l'équation $P(X) = 0$.

1. b. Dresser le tableau de signe de $P(X)$.

2. Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation :

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$2\,\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} - 1 = 0.$$

Exercice 4. Fonction Exponentielle — 7 points

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}$$

1. Étude d'une fonction auxiliaire.
Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$$

1. a. Montrer que pour tout réel positif :

$$g'(x) = \mathrm{e}^x(2x + x^2)$$

Puis étudier le sens de variation de la fonction g.

1. b. Démontrer (à l'aide du tableau de variation) que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée α sur $[0 ; 1]$ et que $g(x) > 0$ sur $[1 ; +\infty[$.

Aide
$\mathrm{e} \approx 2,718$

1. c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f.

2. a. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

2. b. En déduire le sens de variation de f sur $]0; +\infty[$.

Fin du devoir

Bonus
Démontrer que la fonction f de l'exercice 4 admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha}$.