



I. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur un intervalle I , a et $a + h$ deux réels de I avec $h \neq 0$.

I.1 Taux d'accroissement

Définition 1 (Taux d'accroissement)

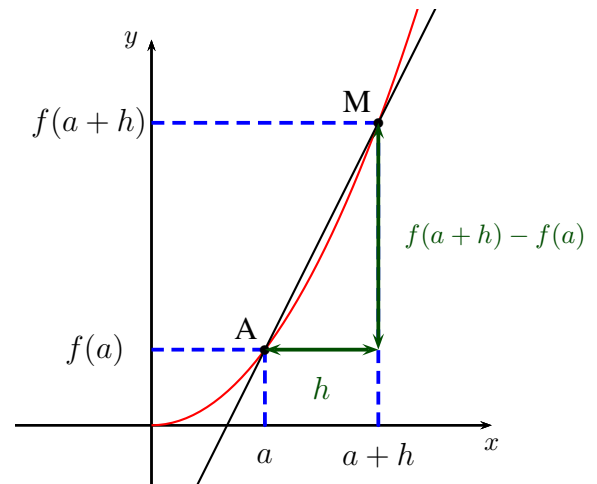
Le **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et $a + h$ est le rapport défini par :

$$t_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation graphique :

En notant \mathcal{C}_f la représentation graphique de la fonction f dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ; A le point de coordonnées $(a; f(a))$ et M le point de coordonnées $(a+h; f(a+h))$:

$$t_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$$



Théorème 1

Le taux d'accroissement de f est donc le coefficient directeur de la droite (AM) sécante à \mathcal{C}_f .

I.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point – Tangente à la courbe d'une fonction en un point

Définition 2 (Nombre dérivé $f'(a)$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
On dit que f est **dérivable** en a , si et seulement si, le rapport $t(h)$ tend vers un réel L lorsque h tend vers 0.
Le réel L est appelé **nombre dérivé** de f en a , on le note $f'(a)$.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Lorsque h tend vers 0, M se rapproche de A .

La droite (AM) se rapproche de sa « position limite » : la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Propriété 1 (Tangente à \mathcal{C}_f en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$. Son équation est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

I.3 Bilan

Propriété 2 (Nombre dérivé)

Si f est dérivable en a alors :

1. Le réel $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a ;
2. Le réel $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 du taux $t(h)$;

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} t_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

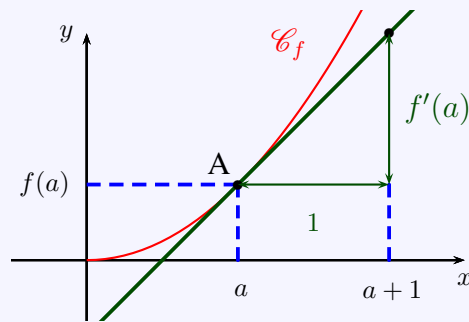
3. Le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la **tangente à la courbe** \mathcal{C}_f au point $A(a; f(a))$ et l'équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Propriété 3 (Tangente à \mathcal{C}_f en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$



Exercice 1

- Montrer que la fonction carré est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.
Donner alors l'équation de la tangente à la courbe de la fonction carrée en 1.



Preuve

II. Fonction dérivée

II.1 Définition

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est **dérivable sur J** si f est dérivable en tout point de J .

Alors, la fonction qui à tout x de J associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .

$$\begin{cases} J & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f'(x) \end{cases}$$

Attention : une fonction peut être définie sur un intervalle I et dérivable sur un autre intervalle $J \subseteq I$.

II.2 Dérivées de quelques fonctions usuelles

Soit k et m des réels (des constantes). On démontre que les fonctions suivantes sont définies sur I et dérivables sur J :

f définie sur I	f définie par	Dérivée de f	f dérivable sur J
$I = \mathbb{R}$	$f_1(x) = \text{Constante} = k$	$f'_1(x) = 0$	$J = \mathbb{R}$
$I = \mathbb{R}$	$f_2(x) = mx + k$	$f'_2(x) = m$	$J = \mathbb{R}$
$I = \mathbb{R}$	$f_3(x) = x$	$f'_3(x) = 1$	$J = \mathbb{R}$
$I = \mathbb{R}$	$f_4(x) = x^2$	$f'_4(x) = 2x$	$J = \mathbb{R}$
$I = \mathbb{R}$	$f_5(x) = x^3$	$f'_5(x) = 3x^2$	$J = \mathbb{R}$
$I = \mathbb{R}$	$f_6(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$f'_6(x) = nx^{n-1}$	$J = \mathbb{R}$
$I = \mathbb{R}^*$	$f_7(x) = \frac{1}{x}$	$f'_7(x) = -\frac{1}{x^2}$	$J = \mathbb{R}^*$



ATTENTION

Certaines fonctions ne sont pas dérivables sur le même ensemble que leur ensemble de définition :

1. La fonction racine carrée est définie sur $I = \mathbb{R}_+$ et dérivable sur $J = \mathbb{R}_+^*$;
2. La fonction valeur absolue est définie sur $I = \mathbb{R}$ et dérivable sur $J = \mathbb{R}^*$.

f définie sur I	f définie par	Dérivée de f	f dérivable sur J
$I = \mathbb{R}_+$	$f_8(x) = \sqrt{x}$	$f'_8(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$J = \mathbb{R}_+^*$
$I = \mathbb{R}$	$f_9(x) = x = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$f'_9(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$J = \mathbb{R}^*$

II.3 Quelques preuves

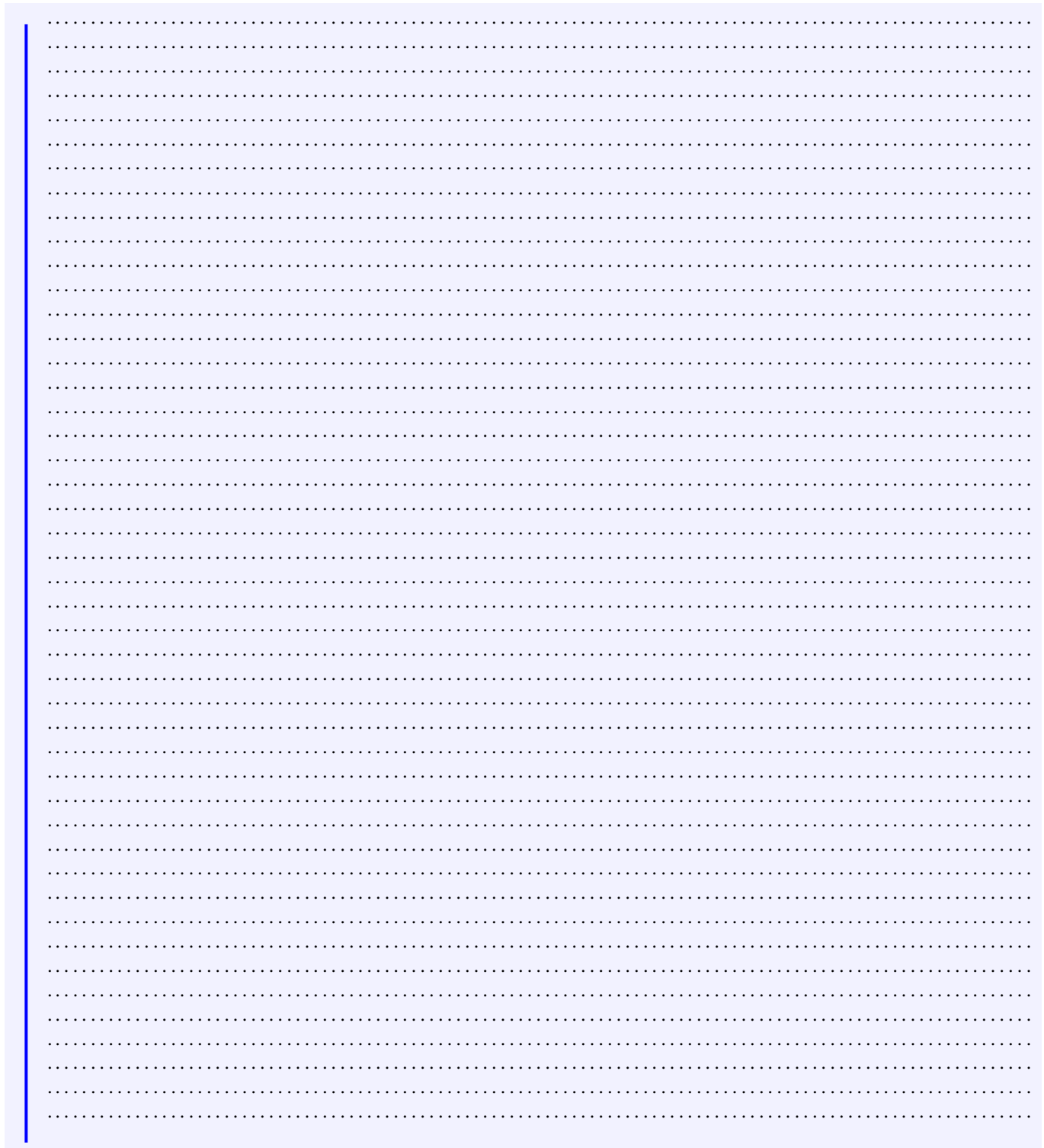


Exercice 2

| Démonstration de quelques formules de dérivée



Preuve



II.4 D'autres notations de la fonction dérivée

On utilise plusieurs notations, notamment en physique de la fonction dérivée. Ces notations sont celles du mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 ; 1716).



Notations de Leibniz

- Si $y = f(x)$ alors $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.
- Si $x = f(t)$ alors $f'(t) = \frac{dx}{dt}$.
- Si $q = f(t)$ alors $f'(t) = \frac{dq}{dt}$.

Voici les différentes autres notations pour la dérivée et la dérivée seconde (dérivée de la dérivée) :



Notations de Leibniz, Lagrange, Euler et Newton

Leibniz		Lagrange	
$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	y'	y''
Euler		Newton	
$D_x y$	$D_x^2 y$	\dot{y}	\ddot{y}

II.5 Dérivées et opérations

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I , k et m des réels (des constantes).

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »	Exemples
I	$k \times u$	$k \times u'$	$(ku)' = ku'$	$(-3x^4)' = -12x^3$ ou $\left(\frac{x^3}{4}\right)' = \frac{3x^2}{4}$
I	$u + v$	$u' + v'$	$(u + v)' = u' + v'$	$\left(2x + \frac{1}{x}\right)' = 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 - 1}{x^2}$
I	$u \times v$	$u'v + uv'$	$(u \times v)' = u'v + uv'$	$(x \times \sqrt{x})' = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$
I avec v non nul sur I	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$
I avec v non nul sur I	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{1}{3+2x^2}\right)' = \frac{-4x}{(3+2x^2)^2}$
I	u^2	$2u'u$	$(u^2)' = 2u'u$	$\left((1+x+x^2)^2\right)' = 2(1+x)(1+x+x^2)$

Au programme de Terminale :

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »
I avec u positif non nul sur I	\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
I	u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$n u' u^{n-1}$	$(u^n)' = n u' u^{n-1}$

II.6 Dérivées d'une fonction composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g la fonction affine définie sur J par $g(x) = ax + b$ telle que pour tout réel $x \in J$ on a $g(x) \in I$

Définition 4

On appelle fonction composée la fonction h définie pour tout réel x de I par :

$$x \mapsto f(g(x)) = f(ax + b)$$

Cette fonction h se note : $f \circ g$, et se lit "f rond g".



Exemple

Par exemple si f est définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g affine définie sur $J = \mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 3$, on a pour tout réel $x \in I = \mathbb{R}$:

$$f(g(x)) = f(2x + 3) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

Le fonction $h = f \circ g$ est donc la fonction

$$x \mapsto 4x^2 + 12x + 9$$

