Math93.com

Dérivation - Partie 1 (*Derivative*)

1re Spé Maths

I. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Dans toute cette partie, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, a et $a+h$ deux réels de I avec $h \neq 0$.

I.1 Taux d'accroissement

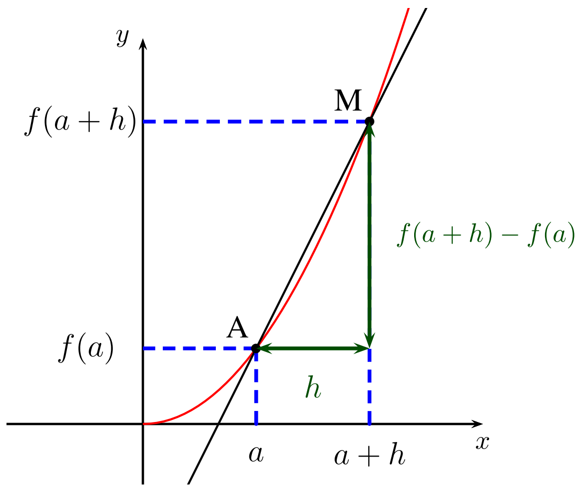
Définition 1 (Taux d'accroissement)

Le **taux d'accroissement** de la fonction f entre a et $a+h$ est le rapport défini par :

$$t_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation graphique :
En notant $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ \right)$; A le point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ et M le point de coordonnées $(a+h\ ;\ f(a+h))$:

$$t_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A}.$$



Théorème 1

Le taux d'accroissement de f est donc le cœfficient directeur de la droite (AM) sécante à $\mathscr{C}_f$.

I.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point – Tangente à la courbe d'une fonction en un point

Définition 2 (Nombre dérivé $f'(a)$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable** en a, si et seulement si, le rapport $t(h)$ tend vers un réel L lorsque h tend vers 0.
Le réel L est appelé **nombre dérivé** de f en a, on le note $f'(a)$.

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} t_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}}$$

Lorsque h tend vers 0, M se rapproche de A.
La droite (AM) se rapproche de sa « position limite » : la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.

Propriété 1 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$. Son équation est donnée par :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

I.3 Bilan

Propriété 2 (Nombre dérivé)

Si f est dérivable en a alors :

1. Le réel $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a ;
2. Le réel $f'(a)$ est la limite quand h tend vers 0 du taux $t(h)$;

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} t_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

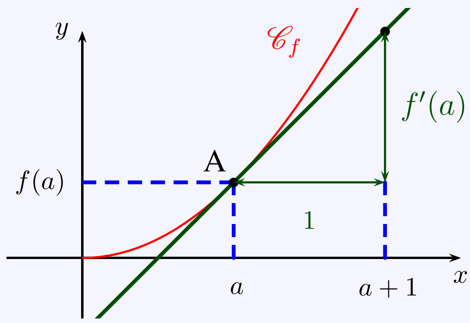
3. Le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la **tangente à la courbe** $\mathscr{C}_f$ au point $A\,(a\,;\,f(a))$ et l'équation de cette tangente est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

Propriété 3 (Tangente à $\mathscr{C}_f$ en A)

Si f est dérivable en a alors, la **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et qui a pour cœfficient directeur $f'(a)$.
Son équation est donnée par :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$



Exercice 1

Montrer que la fonction carré est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.
Donner alors l'équation de la tangente à la courbe de la fonction carrée en 1.

Preuve

Soit f la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Pour $a = 1$ et $h \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} t_1(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} \end{aligned}$$

$$\boxed{t_1(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2 + h}$$

Donc la limite que h tend vers 0 du taux d'accroissement existe et vaut 2.

$$\boxed{f'(1) = \lim_{h \to 0} t_1(h) = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2}$$

La fonction carrée f est donc dérivable en 1 et de nombre dérivé $f'(1) = 2$.
L'équation de la tangente à la courbe de la fonction carrée en 1 est alors : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = 2 \end{cases} \Longrightarrow y = 2(x-1) + 1 \Longrightarrow \boxed{y = 2x - 1}$$

II. Fonction dérivée

II.1 Définition

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable sur J** si f est dérivable en tout point de J.
Alors, la fonction qui à tout x de J associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

$$\begin{cases} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

Attention : une fonction peut être définie sur un intervalle I et dérivable sur un autre intervalle $J \subseteq I$.

II.2 Dérivées de quelques fonctions usuelles

Soit k et m des réels (des constantes). On démontre que les fonctions suivantes sont définies sur I et dérivables sur J :

f définie sur I	f définie par	Dérivée de f	f dérivable sur J
$I=\mathbb{R}$	$f_1(x) = Constante = k$	$f_1'(x)=0$	$J=\mathbb{R}$
$I=\mathbb{R}$	$f_2(x) = mx+k$	$f_2'(x)=m$	$J=\mathbb{R}$
$I=\mathbb{R}$	$f_3(x) = x$	$f_3'(x)=1$	$J=\mathbb{R}$
$I=\mathbb{R}$	$f_4(x) = x^2$	$f_4'(x)=2x$	$J=\mathbb{R}$
$I=\mathbb{R}$	$f_5(x) = x^3$	$f_5'(x)=3x^2$	$J=\mathbb{R}$
$I=\mathbb{R}$	$f_6(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$f_6'(x)=nx^{n-1}$	$J=\mathbb{R}$
$I=\mathbb{R}^*$	$f_7(x) = \dfrac{1}{x}$	$f_7'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$J=R^*$

ATTENTION

Certaines fonctions ne sont pas dérivables sur le même ensemble que leur ensemble de définition :

1. La fonction racine carrée est définie sur $I=\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $J=R_+^*$;
2. La fonction valeur absolue est définie sur $I=\mathbb{R}$ et dérivable sur $J=R^*$.

f définie sur I	f définie par	Dérivée de f	f dérivable sur J
$I=\mathbb{R}_+$	$f_8(x)=\sqrt{x}$	$f_8'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$J=R_+^*$
$I=\mathbb{R}$	$f_9(x)=\mid x\mid=\begin{cases} x & \text{si } x\geqslant 0 \\ -x & \text{si } x<0\end{cases}$	$f_9'(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$	$J=R^*$

II.3 Quelques preuves

Exercice 2

Démonstration de quelques formules de dérivée

Preuve

1. Soit f_2 la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = mx + p$.
Pour tout réel x et $h \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} t_x(h) = \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} &= \frac{m(x+h) + p - (mx+p)}{h} \\ &= \frac{mx + mh + p - mx - p}{h} \\ &= \frac{mh}{h} \end{aligned}$$

$$\boxed{t_x(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m}$$

Donc la limite que h tend vers 0 du taux d'accroissement existe et vaut m.

$$\boxed{f_2'(x) = \lim_{h \to 0} t_x(h) = m}$$

La fonction affine f_2 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f_2'(x) = m$.

2. Soit f_4 la fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f_4(x) = x^2$.
Pour tout réel x et $h \neq 0$ on a :

$$\begin{aligned} t_x(h) = \frac{f_4(x+h) - f_4(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2hx + h^2}{h} \end{aligned}$$

$$\boxed{t_x(h) = \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = 2x + h}$$

Donc la limite que h tend vers 0 du taux d'accroissement existe et vaut $2x$.

$$\boxed{f_4'(x) = \lim_{h \to 0} t_x(h) = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x}$$

La fonction carrée f_4 est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée $f_4'(x) = 2x$.

3. Soit f_9 la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ par $f_9(x) = \mid x \mid = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Pour tout réel x et $h \neq 0$ on a :

$$t_x(h) = \frac{f_9(x+h) - f_9(x)}{h} = \frac{\mid x+h \mid - \mid x \mid}{h}$$

- Pour $x = 0$ on a :

$$t_0(h) = \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} = \frac{\mid h \mid}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0 \\ -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

  On voit donc que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 car la limite du taux d'accroissement quand h tend vers 0 n'existe pas.

- Pour $x > 0$ on a :
  On va faire tendre h vers 0, donc on peut admettre que pour h suffisamment proche de 0, positif ou négatif, on a $x + h > 0$ car $x > 0$. On a alors :

$$t_x(h) = \frac{|\,x+h\,| - |\,x\,|}{h} = \frac{x+h-x}{h} = 1$$

La fonction valeur absolue est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de dérivée $f_9'(x) = 1$.

- Pour $x < 0$ on a :
  On va faire tendre h vers 0, donc on peut admettre que pour h suffisamment proche de 0, positif ou négatif, on a $x + h < 0$ car $x < 0$. On a alors :

$$t_x(h) = \frac{|\,x+h\,| - |\,x\,|}{h} = \frac{-x-h+x}{h} = -1$$

La fonction valeur absolue est donc dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et de dérivée $f_9'(x) = -1$.

II.4 D'autres notations de la fonction dérivée

On utilise plusieurs notations, notamment en physique de la fonction dérivée. Ces notations sont celles du mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 ; 1716).

Notations de Leibniz

- Si $y = f(x)$ alors $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.
- Si $x = f(t)$ alors $f'(t) = \dfrac{dx}{dt}$.
- Si $q = f(t)$ alors $f'(t) = \dfrac{dq}{dt}$.

Voici les différentes autres notations pour la dérivée et la dérivée seconde (dérivée de la dérivée) :

Notations de Leibniz, Lagrange, Euler et Newton

Leibniz	Lagrange
$\dfrac{dy}{dx}$ $\quad$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$	y' $\quad$ y''
Euler	**Newton**
$D_x y$ $\quad$ $D_x^2 y$	$\dot{y}$ $\quad$ $\ddot{y}$

II.5 Dérivées et opérations

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I, k et m des réels (des constantes).

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »	Exemples
I	$k \times u$	$k \times u'$	$(ku)' = ku'$	$(-3x^4)' = -12x^3$ ou $\left(\dfrac{x^3}{4}\right)' = \dfrac{3x^2}{4}$
I	$u + v$	$u' + v'$	$(u+v)' = u' + v'$	$\left(2x + \dfrac{1}{x}\right)' = 2 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2}$
I	$u \times v$	$u'v + uv'$	$(u \times v)' = u'v + uv'$	$(x \times \sqrt{x})' = 1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)' = \dfrac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2}$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{3 + 2x^2}\right)' = \dfrac{-4x}{(3 + 2x^2)^2}$
I	u^2	$2u'u$	$(u^2)' = 2u'u$	$\left((1 + x + x^2)^2\right)' = 2(1 + 2x)(1 + x + x^2)$

On a aussi :

f définie sur I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »	f dérivable sur J
I avec u positif non nul sur I	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$J \subseteq I$ sur lequel u est positif et non nul
I	u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$n\, u'\, u^{n-1}$	$(u^n)' = n\, u^{n-1} \times u'$	I

II.6 Dérivées d'une fonction composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g la fonction affine définie sur J par $g(x) = ax + b$ telle que pour tout réel $x \in J$ on a $g(x) \in I$

Définition 4

On appelle fonction composée la fonction h définie pour tout réel x de I par :

$$x \longmapsto f\Big(g(x)\Big) = f(ax + b)$$

Cette fonction h se note : $f o\, g$, et se lit "f rond g".

Exemple

Par exemple si f est définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g affine définie sur $J = \mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 3$, on a pour tout réel $x \in I = \mathbb{R}$:

$$f\Big(g(x)\Big) = f(2x + 3) = (2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

Le fonction $h = f o\, g$ est donc la fonction

$$x \longmapsto 4x^2 + 12x + 9$$

Propriété 4

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g la fonction affine définie sur J par $g(x) = ax + b$ telle que pour tout réel $x \in J$ on a $g(x) \in I$.
La fonction composée $h = f o\, g$ définie pour tout réel x de I par :

$$x \longmapsto f\Big(g(x)\Big) = f(ax+b)$$

est de dérivée dans le cas général :

$$\boxed{h'(x) = f'\Big(g(x)\Big) \times g'(x)}$$

Et puisque $g(x) = ax + b$

$$\boxed{h'(x) = f'\Big(g(x)\Big) \times a}$$

Exemple

Par exemple si f est définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g affine définie sur $J = \mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 3$

- Méthode 1 : La fonction composée $h = f o\, g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x :

$$h'(x) = f'\Big(g(x)\Big) \times g'(x)$$

Or

$$f'(x) = 2x \text{ et } g'(x) = 2$$

Donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'\Big(g(x)\Big) \times g'(x) \\ &= 2(2x+3) \times 2 \\ \end{aligned}$$
$$\boxed{h'(x) = 8x + 12}$$

- Méthode 2 :
On a pour tout réel $x \in I = \mathbb{R}$:

$$f\Big(g(x)\Big) = f(2x+3) = (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

La fonction $h = f o\, g$ est donc la fonction

$$x \longmapsto 4x^2 + 12x + 9$$

Et h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\boxed{h'(x) = (4x^2 + 12x + 9)' = 8x + 12}$$

Fin du cours